Lösungen der Mathe(II)vorbereitungsaufgaben

von Steve Göring

20.07.2009

(an der Lösung waren Andreas Loth, Christian Koob und Steve Göring beteiligt)

Alle Angaben ohne Gewähr.

Rechtschreibfehler könnt ihr für euch behalten,

inhaltliche Fehler bitte an stg7@gmx.de

Dokument wurde mit Lyx 1.6.3 erstellt

Inhaltsverzeichnis

1 lineare Algebra

1.1 Aufgabe 1

1.1.1 Verktorraum

Eigenschaften für V

1. (K,+, $\times$) ist ein Körper
2. (V,+) ist eine abelsche Gruppe:
   a) Assoziativgesetz gilt
   b) neutrales Element
   c) inverses Element
   d) Kommutativgesetz
   e) $V \neq \varnothing$
3. $\forall \alpha, \beta \in K : \forall u, v \in V :$
   a) $(\alpha + \beta)u = (\alpha u) + (\beta u)$
   b) $\alpha(u + v) = (\alpha u) + (\alpha v)$
   c) $\alpha(\beta u) = (\alpha\beta)u$
   d) $1u = u$

1.1.2 Standardverktorräume

R^n, C^n und Funktionen

1.1.3 spezielle Begriffe

- *Linearkombination:*

$\alpha_1 \cdot \vec{u_1} + \ldots + \alpha_n \cdot \vec{u_n} = \vec{b}$

- *lineare Hülle*

$[\overrightarrow{a}] = \{\overrightarrow{x} \mid \exists \alpha \in K : x = \vec{\alpha} \cdot \vec{a}\}$

- *Erzeugendensystem*

$M \subseteq V$ M heißt dann erzeugenden System eines linearen Unterraumes $U \subseteq V$ falls $[M] = U$

- *Basis*

Vektormenge eines minimales Erzeugendensystem, d.h. die Vektoren des Erzeugendensystems sind linear unabhängig

- *Dimension*

Anzahl der Basisverktoren

- *linearer Unterraum*

Eigenschaften
$\vec{0} \in U$
$\vec{a}, \vec{b} \in U \rightarrow \vec{a} + \vec{b} \in U$
$\vec{a} \in U \rightarrow \alpha \cdot \vec{a} \in U$

- *affiner Unterraum*

Eigenschaften
$T \subseteq R^n$
$T = \vec{r_0} + U$ wenn $\vec{r_0} \in R^n$ und U linearer Unterraum
$dim(T) = dim(U)$

1.2 Aufgabe 2

Gegeben:
$U_1 = \{\vec{x} \in R^4 \mid \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \vec{x} = \vec{0}\}$
$U_2 = [\vec{a}, \vec{b}]$ mit $\vec{a} = (1, -1, 0, 1)^T$und $\vec{b} = (0, 3, 1, -5)^T$

1.2.1 Basis von U_1und U_2

Lösung:
U_1:
$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \vec{x} = \vec{0}$
Nach Gauß-Jordan lösen.

x_1	x_2	x_3	x_4	
1	2	-1	1	0
0	1	2	1	0
1	0	-5	-1	0
0	1	2	1	0

$x_3$und $x_4$sind frei wählbar

setze: $x_3 = t$ $x_4 = s$
$x_1 + 0 \cdot x_2 - 5 \cdot t - s = 0$
$0 \cdot x_1 + x_2 + 2t + s = 0$

hieraus folgt:
$x_1 = 5t + s$
$x_2 = -2t - s$
$x_3 = t$
$x_4 = s$
somit

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} 5 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot t + \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot s$$

$$B_1 = \left\{ \begin{pmatrix} 5 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

U_2:
$U_2 = [\vec{a}, \vec{b}]$
$\vec{a}$ und $\vec{b}$ sind linear unabhängig daraus folgt:

$$B_2 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 1 \\ -5 \end{pmatrix} \right\}$$

1.2.2 Dimensionen

$dim(U_1) = 2 = dim(U_2)$, weil B_1und B_2aus 2 Vektoren bestehen

1.2.3 Schnittmenge bestimmen

$U = U_1 \cap U_2$
1. möglicher Weg

$dim(U) \leq 2$ wegen Dimension von U_1und U_2
$U_1 = [\vec{a}, \vec{c}]$
$U_2 = [\vec{a}, \vec{b}]$
$\vec{c}$ und $\vec{b}$ sind linear unabhängig
daraus folgt $U = [\vec{a}]$

2. möglicher Weg
beide lineare Unterräume in Parameterform und gleichsetzen, mit Gauß-Jordan lösen

1.2.4 Durchschnitt vs. Vereinigung

Durchschnitt zweier linearer Unterräume ist ein linearer Unterraum
zu zeigen:
$U = U_1 \cap U_2$
$\vec{0} \in U$
$\vec{a} \in U$ und $\vec{b} \in U \to \vec{a} + \vec{b} \in U$
$\forall \alpha : \vec{a} \in U \to \alpha \cdot \vec{a} \in U$
ist einfach zu zeigen.

Beweis mach ich später eventuell

Vereinigung zweier linearer Unterräume ist kein linearer Unterraum
Gegenbeispiel:
$U_1 = [\vec{e_1}]$ $U_2 = [\vec{e_2}]$
$U = U_1 \cup U_2$
$\vec{e_1} \in U$ $\vec{e_2} \in U$
$\vec{e_1} + \vec{e_2} \notin U$ (1)
(U_1ist x-Achse, U_2ist y-Achse, U ist dann das Koordinatenkreuz; (1) liegt dann im 1. Quadranten, also nicht in U)

1.2.5 $U_1 = U_2$?

Nein, weil dann müsste $U_1 \cap U_2 = U_1 = U_2$ unter 1.2.3 wurde das bereits widerlegt.

1.3 Aufgabe 3

$\Gamma_1 = \{\vec{r} \in R^3 \mid A\vec{r} = \vec{b}$
$\Gamma_2 = \vec{r_2} + [\vec{a}]$
$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$
$\vec{a} = (2, -1, 3)^T$
$\vec{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$
$\vec{r_1} = (1, 1, 1)^T$

1.3.1 Rang

$rg(A) = 2$
$rg(A, \vec{b}) = 2$

1.3.2 Ist $\Gamma_1 \neq \varnothing$?

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix} \vec{r} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$$

Gauß-Jordan

x	y	z	
1	2	0	3
0	1	3	4
1	0	-6	-5
0	1	3	4

$z$ist frei wählbar, setze $z = t$
daraus folgt:
$x - 6z = -5$
$y + 3z = 4$

$x = 6z - 5$
$y = -3z + 4$
$z = t$

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} -5 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 6 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix} t$$

daraus folgt:

$$\Gamma_1 = \begin{pmatrix} -5 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} + \left[\begin{pmatrix} 6 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix} \right] = \vec{d} + [\vec{e}]$$

somit ist $\Gamma_1 \neq \varnothing$
$dim(\Gamma_1) = 1$

1.3.3 Gilt $\Gamma_1 = \Gamma_2$?

Nein, dazu müssten $\vec{e}$ linear von $\vec{a}$ abhängig sein, ist in diesem Fall aber nicht so, falls es so wäre, müsste außerdem $\vec{r_1} \in \Gamma_2$sein.

1.4 Aufgabe 4

$\Gamma = \vec{r_0} + [\vec{a_1}, \vec{a_2}]$
$\vec{r_0} = (0, 0, 0, 0)^T$
$\vec{r_1} = (0, 1, 2, 5)^T$
$\vec{a_1} = (1, 1, 1, 1)^T$
$\vec{a_2} = (-1, 0, 2, 3)^T$

1.4.1 orthogonale Komplement zu U

$U = [\vec{a_1}, \vec{a_2}]$
Basis:
$(1,1,1,1) \cdot \vec{x} = 0$
$(-1,0,2,3) \cdot \vec{x} = 0$
daraus folgt:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 2 & 3 \end{pmatrix} \cdot \vec{x} = \vec{0}$$

Mittels Gauß-Jordan lösen

x_1	x_2	x_3	x_4	
1	1	1	1	0
-1	0	2	3	0
1	1	1	1	0
0	1	3	4	0
1	0	-2	-3	0
0	1	3	4	0

$x_3$und $x_4$sind frei wählbar; setze:
$x_3 = t$ und $x_4 = z$
daraus folgt:
$x_1 - 2t - 3z = 0$
$x_2 + 3t + 4z = 0$
(umstellen)
$x_1 = 2t + 3z$
$x_2 = -3t - 4z$
$x_3 = t$
$x_4 = z$

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} t + \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} z$$

$$U^{\perp} = \left[\begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right] = [\vec{b}, \vec{c}]$$

Die Vektoren $\vec{b}$ und $\vec{c}$ sind linear unabhängig, sie bilden somit eine Basis von $U^{\perp}$
$B = \{\vec{b}, \vec{c}\}$
Dimension: $dim(U^{\perp}) = 2$

1.4.2 Fußpunkt, Lotvektor usw.

$\vec{r_1} + \vec{d} = \vec{r_f}$
$\vec{r_1} = \vec{r_f} - \vec{d}$
$\vec{r_f}$ ist Ebenenpunkt

$$\vec{r_1} = \vec{r_0} + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot s + \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \cdot t - \vec{d}$$

$$\vec{r_1} - \vec{r_0} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \\ 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} s \\ t \end{pmatrix} - \vec{d}$$

so nun wird von rechts die transponierte Matrix multipliziert.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 2 & 3 \end{pmatrix} \cdot (\vec{r_1} - \vec{r_0}) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 2 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \\ 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} s \\ t \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 2 & 3 \end{pmatrix} \cdot \vec{d}$$

wir wissen $\vec{d} \perp$ auf beide Spannverktoren der Ebene, daraus folgt nun:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 2 & 3 \end{pmatrix} \cdot (\vec{r_1} - \vec{r_0}) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 2 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \\ 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} s \\ t \end{pmatrix}$$

für $\vec{r_1}$ und $\vec{r_0}$ konkrete Werte einsetzen, Matrizenmultiplikation anwenden, und man erhält:

$$\begin{pmatrix} 8 \\ 19 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 4 \\ 4 & 14 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} s \\ t \end{pmatrix}$$

das kann man nun mit Gauß-Jordan, oder Cramerscher Regel lösen und erhält:
$s = \frac{9}{10}$
$t = \frac{11}{10}$
s und t setzt man nun in die Ebenengleichung ein und erhält:

$$\vec{r_f} = \frac{1}{10} \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 9 \\ 31 \\ 42 \end{pmatrix}$$

für $\vec{d}$ erhält man:

$$\vec{d} = \vec{r_f} - \vec{r_0} = \frac{1}{10} \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 11 \\ -8 \end{pmatrix}$$

1.4.3 Abstand

$d(\vec{r_1}, \Gamma) = \|\vec{d}\| = \frac{1}{10} \cdot \sqrt{190}$

1.5 Aufgabe 5

Ausgleichpolynom: $p(x) = b + a \cdot x$
$y_1 \approx p(x_1) = b + a \cdot x_1$
$y_2 \approx p(x_2) = b + a \cdot x_2$
$y_3 \approx p(x_3) = b + a \cdot x_3$
$y_4 \approx p(x_4) = b + a \cdot x_4$

$$\vec{y} \approx \begin{pmatrix} 1 & x_1 \\ 1 & x_2 \\ 1 & x_3 \\ 1 & x_4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b \\ a \end{pmatrix} = A \cdot \vec{a} \text{ mit } \vec{a} = \begin{pmatrix} b \\ a \end{pmatrix}$$

Nun muss man folgendes lösen:
$A^T \cdot A \cdot \vec{a} = A^T \cdot \vec{y}$
konkrete Werte:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \\ 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \quad \vec{y} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix}$$

einsetzen:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 2 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \\ 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \cdot \vec{a} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 2 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix}$$

(Matrizenmultiplikation, auflösen)

$$\begin{pmatrix} 4 & 4 \\ 4 & 14 \end{pmatrix} \cdot \vec{a} = \begin{pmatrix} 8 \\ 19 \end{pmatrix}$$

Gleichungssystem mit Gauß-Jordan lösen:

b	a	
4	4	8
4	14	19
4	4	8
0	10	11
40	0	36
0	10	11

daraus folgt:
$b = \frac{36}{40} = \frac{9}{10}$
$a = \frac{11}{10}$
somit ist die Ausgleichsgerade:

$p(x) = \frac{9}{10} + \frac{11}{10} \cdot x$
$p(8) = \frac{97}{10}$
Werte für die Punkte ausrechnen um die Abweichung zu bestimmen:
$p(x_1) = p(-1) = -\frac{2}{10}$
$p(x_2) = p(0) = \frac{9}{10}$
$p(x_3) = p(2) = \frac{31}{10}$
$p(x_4) = p(3) = \frac{42}{10}$
nun kann man anhand der ausgerechneten Werte und der "original" Werte die Abweichung D berechnen:
$\sum(y_n - p(x_n))^2 = 1,9$

1.6 Aufgabe 6

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -2\lambda & \lambda & 9 \\ 2 & 2 & \lambda \end{pmatrix}$$

1.6.1 Determinante

$$det(A) = 2 \cdot det(\begin{pmatrix} \lambda & 9 \\ 2 & \lambda \end{pmatrix}) - det(\begin{pmatrix} -2\lambda & 9 \\ 2 & \lambda \end{pmatrix}) + det(\begin{pmatrix} -2\lambda & \lambda \\ 2 & 2 \end{pmatrix})$$
$det(A) = 4\lambda^2 - 6\lambda - 18$

1.6.2 A invertierbar?

genau dann wenn $det(A) \neq 0$
$4\lambda^2 - 6\lambda - 18 = 0$
$\rightarrow \lambda_1 = 3 \ \lambda_2 = -\frac{3}{2}$

$det(A^{-1}) = \frac{1}{det(A)} = \frac{1}{4\lambda^2-6\lambda-18}$

1.6.3 nicht triviale Lsg des homogenen LGS

für $det(A) = 0$ gibt es nicht-triviale Lösungen

1.6.4 inhomogenes LGS

$A\vec{x} = \vec{b}$

- genau eine Lösung: wenn A invertierbar ist, somit $det(A) \neq 0$
- keine Lösung: wenn Gauß-Jordan keine Lösung hat ($det(A) = 0$)

- unendlich viele Lösungen: wenn Gauß-Jordan unendlich viele Lsg hat ($det(A) = 0$)

1.7 Aufgabe 7

$\vec{a} = (0, 1, 11)^T$ $\vec{b} = (1, 1, -5)^T \vec{c} = (3, 2, 1)^T$

1.7.1 Kreuzprodukt, Skalarprodukt,Betrag

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{pmatrix} -16 \\ 11 \\ -1 \end{pmatrix} = \vec{c}$$
$$\vec{a} \circ (\vec{a} \times \vec{b}) = 0$$
$$\|\vec{c}\| = \sqrt{378} = 3 \cdot \sqrt{42}$$ the magic 42
$$\vec{e_1} \times \vec{e_2} = \vec{e_3}$$

1.7.2 Parameterdarstellung

$$\Gamma = \{\vec{r} \in R^3 \mid \vec{c} \times \vec{r} = \vec{b}\}$$
$$\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -5 \end{pmatrix}$$
$$\begin{pmatrix} 2z - y \\ -3z + x \\ 3y - 2x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -5 \end{pmatrix}$$
$$\begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & -3 \\ -2 & 3 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -5 \end{pmatrix}$$
mit Gauß-Jordan lösen, dabei die Zeilen tauschen:

x	y	z	
1	0	-3	1
0	-1	2	1
-2	3	0	-5
...	...	..	..
1	0	-3	1
0	1	-2	-1
0	0	0	0

daraus folgt, dass z frei wählbar ist, setze $z = t$:
$x = 1 + 3t$
$y = -1 + 2t$
$z = t$

erhalten:
$\vec{r} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} t$
somit ist Γ dann:
$\Gamma = \{\vec{r} \in R^3 \mid \vec{r} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + \left[\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}\right]\}$
Γ ist also ein affiner Unterraum und hat die Dimension: $dim(\Gamma) = 1$

1.7.3 Normalenvektor /Hessesche Form

$\Gamma' = \vec{r_0} + [\vec{a}, \vec{b}]$ mit $\vec{r_0} = (-1, 0, 1)^T$
Normalenvektor: $\vec{n} = \vec{a} \times \vec{b} = \begin{pmatrix} -16 \\ 11 \\ -1 \end{pmatrix}$
Hessesche Form: $\vec{n} \circ \vec{x} = d$
d ermitteln: $d = \vec{n} \circ \vec{r_0} = 15$
somit: Γ' in Hessescher Form : $\begin{pmatrix} -16 \\ 11 \\ -1 \end{pmatrix} \circ \vec{x} = 15$

1.7.4 Halbräume

Setze einfach die Vektoren in die Hessesche Form der Ebene ein und schau wie sich das d verhält.
$(-16, 11, -1) \cdot (0, 1, 1)^T = 10 < 15$ “unterer” Halbraum
$(-16, 11, -1) \cdot (1, 1, 0)^T = -5 < 15$ “unterer” Halbraum
Beide Punkte befinden sich daher im selben Halbraum

1.8 Aufgabe 8

$$\Gamma = \left[\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right] = [\vec{a}, \vec{b}]$$

1.8.1 spezielle Spiegelungspunkte

1. $L(\vec{0}) = \vec{0}$
2. $L(\vec{a}) = \vec{a} = M \cdot \vec{a}$

3. $L(\vec{b}) = \vec{b} = M \cdot \vec{b}$

4. $L(\vec{a} \times \vec{b}) = -\vec{a} \times \vec{b} = M \cdot (\vec{a} \times \vec{b})$

1.8.2 Matrizendarstellung von L

aus 1.8.1: 2,3,4 folgt:
$M \cdot \left(\vec{a}, \vec{b}, \vec{a} \times \vec{b}\right) = \left(\vec{a}, \vec{b}, -(\vec{a} \times \vec{b})\right)$ (quasi Matrix mal Eingaben als Matrix = Ergebnisse als Matrix)
$M \cdot A = C$
$M = C \cdot A^{-1}$
zum lösen muss man also A invertieren, mittels Gauß-Jordan, $A \cdot X = E$
dann setzt man A^{-1}ein und erhält:
$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ da es sich hier um eine Spiegelung handelt, muss eine symmetrische Matrix rauskommen!

1.8.3 Abstand

$\vec{x} = \vec{e}$
$L(\vec{x}) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ (Matrizenmultiplikation, einfaches einsetzen und ausrechnen)
$d(\vec{x}, \Gamma) = \frac{1}{2} \cdot \|L(\vec{x}) - \vec{x}\| = \frac{1}{2}\sqrt{2}$

1.9 Aufgabe 9

$\Gamma = \left[\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right]$
$g : R^3 \to R^3$ Drehung um Γmit Drehwinkel $\phi = \frac{2}{3}\Pi$
Relativ Kompliziert, zuerst Transformation, dann Spiegelung, dann Rücktransformation....

1.10 Aufgabe 10

$M = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} -1 & -2 & 2 \\ -2 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$
$L(\vec{x}) = M \cdot \vec{x}$

1.10.1 Spiegelung?

M ist orthogonal (laut Aufgabenstellung)
$M^T = M$
$det(M) = \frac{1}{3}(-1 \cdot det(\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}) - 2 \cdot det(\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}) + 2 \cdot det(\begin{pmatrix} -2 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix})) = \frac{1}{3}(-3 + 12 - 12) = -1$
($det(M) = -1$ ist erfüllt!)

1.10.2 Spiegelebene bestimmen

Lösung weicht vom Standardlösung ab

$L(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}) = \frac{1}{3} \cdot \begin{pmatrix} -1 & -2 & 2 \\ -2 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} = \vec{z};$

$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \vec{x}$ ist ein beliebiger Punkt

$\vec{x} + \vec{n_1} = \vec{z}$

$\vec{n_1} = \vec{z} - \vec{x} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} -4 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}$

$\vec{n} = \frac{1}{2}\vec{n_1} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$

// eigentlich ist L eine lineare Abbildung, demzufolge ist Γ eine Ursprungsebene, die hat d=0, für eine nicht lineare Abbildung muss das folgende berechnet werden (für d kommt dann etwas $\neq 0$ heraus)

somit liegt $\vec{x} + \vec{n} = \vec{k} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ auf der Ebene

$\vec{n} \circ \vec{k} = d = 0$

die Ebenengleichung lautet dann

$\Gamma = \{\vec{x} \in R^3 \mid \vec{n} \circ \vec{x} = 0\}$, falls Parametergleichung gefordert ist, muss man halt umformen.

1.11 Aufgabe 11

$A = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 3 & 7 \end{pmatrix}$ symmetrische Matrix

1.11.1 Eigenwerte / Eigenräume/ Eigenverktoren

$A \cdot \vec{x} = \lambda \cdot \vec{x}$
$\vec{0} = \lambda\vec{x} - A\vec{x}$
$\vec{0} = (\lambda E - A)\vec{x}$
einsetzen:
$\vec{0} = \left(\begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 3 & 7 \end{pmatrix} \right) \cdot \vec{x}$
$\vec{0} = \begin{pmatrix} \lambda + 1 & -3 \\ -3 & \lambda - 7 \end{pmatrix} \cdot \vec{x} = M \cdot \vec{x}$
Determinante von M bestimmen:
$det(M) = (\lambda + 1) \cdot (\lambda - 7) + 9 = \lambda^2 - 6\lambda - 16$
Wann ist die Determinante Null?
$\lambda_1 = 8$ $\lambda_2 = -2$ (Eigenwerte)

λ_1 in Gleichung einsetzen:
$\vec{0} = \begin{pmatrix} 9 & -3 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} \cdot \vec{x}$
mit Gauß-Jordan lösen (Parameterlösung, 2. Zeile der Matrix ist immer vielfaches der 1.)
man erhält:
$\vec{x_1} = t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$
und für λ_2 ergibt dass dann:
$\vec{x_2} = s \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}$ Eigenvektoren stehen immer senkrecht zueinander, in diesem Fall kann man den Eigenvektor für λ_2 "raten".

Eigenraum: $\vec{x_1}$ und $\vec{x_2}$

Orthogonale Matrix T bestimmen, die $D = T^T A T = T^{-1} A T$ erfüllt:
$D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$
$T = \frac{1}{\|\vec{x_1}\|} \cdot (\vec{x_1}, \vec{x_2}) = \frac{1}{\sqrt{10}} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$

1.11.2 quadratische Gleichung lösen

$q(\vec{x}) = -x^2 + 6xy + 7y^2$
in die Form :
$q(\vec{x}) = (x, y) \cdot A \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ bringen.
$q(\vec{x}) = (x, y) \cdot \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 3 & 7 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$
Transformation mit:

$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = T \cdot \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$
darauf folgt:
$q(\vec{x}) = (u, v) \cdot T^T \cdot A \cdot T \cdot \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$
$T^T \cdot A \cdot T = D$ (aus vorhergenendem Aufgabenteil)
somit ergibt das:
$q(\vec{x}) = (u, v) \cdot \begin{pmatrix} 8 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = 8u^2 - 2v^2 = \frac{u^2}{\sqrt{\frac{1}{8}}^2} - \frac{v^2}{\sqrt{\frac{1}{2}}^2} = \frac{u^2}{e^2} - \frac{v^2}{d^2}$

das ist eine Hyperbel (würde da ein + stehen wäre es eine Ellipse).
Schritte für das Zeichnen:

1. Standard (x,y) Koordinatensystem
2. Achsen u und v mit Hilfe der Eigenverktoren einzeichnen, Richtung beachten
3. Hyperbel / Ellipsen mit einem Hilfsrechteck einzeichnen, Rechteck befindet sich an -e, +e und -d, +d auf dem (u,v) Koordinatensystem

Skizze folgt eventuell später noch

1.12 Aufgabe 12

$\Gamma = \vec{r_0} + [\vec{a}]$
$\vec{r_0} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ $\vec{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$
Spiegelung an Γ: $F(\vec{x}) = M \cdot \vec{x} + \vec{b}$

Betrachten Spiegelung $L(\vec{x}) = M \cdot \vec{x}$ an Ursprungsgeraden:
$L(\vec{a}) = L(\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$
$L(\begin{pmatrix} -4 \\ 3 \end{pmatrix}) = -\begin{pmatrix} -4 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \end{pmatrix}$ (Spiegelung eines Vektors der senkrecht zu der Gerade steht)
wir erhalten dadurch folgende Gleichung:
$M \cdot \begin{pmatrix} 3 & -4 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 4 & -3 \end{pmatrix}$ nun multiplizieren wir von links A^{-1} dran und erhalten:
$M = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 4 & -3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & -4 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}^{-1}$ die invertierte Matrix ermitteln wir mittels Gauß-Jordan : $A \cdot A^{-1} = E$
$M = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 4 & -3 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{25} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ -4 & 3 \end{pmatrix} = \frac{1}{25} \begin{pmatrix} -7 & 24 \\ 24 & 7 \end{pmatrix}$

F bestimmen:
$F(\vec{x}) = L(\vec{x}) + \vec{b}$

$F(\vec{r_0}) = \vec{r_0}$
$L(\vec{r_0}) + \vec{b} = \vec{r_0}$
$M \cdot \vec{r_0} + \vec{b} = \vec{r_0}$
$\vec{b} = \vec{r_0} - M\vec{r_0} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} - \frac{1}{25} \cdot \begin{pmatrix} 41 \\ 38 \end{pmatrix}$
$F(\vec{x}) = \frac{1}{25} \cdot \begin{pmatrix} -7 & 24 \\ 24 & 7 \end{pmatrix} \cdot \vec{x} + \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} - \frac{1}{25} \cdot \begin{pmatrix} 41 \\ 38 \end{pmatrix}$

2 Differentialrechnung für Funktionen in mehreren Veränderlichen

2.1 Aufgabe 1

$f(x, y) = x \cdot (ln\, y - x) + 2$

2.1.1 Definitionsbereich und Rand

$D = \{(x, y) \in R^2 \mid y > 0\}$ $y > 0$ wegen $ln\, y$
$\partial D = \{(x, y) \in R^2 \mid y = 0\}$

D ist offen falls: $D \cap \partial D = \varnothing$
D ist abgeschlossen falls: $\partial D \subseteq D$

in unserem Fall gilt: $D \cap \partial D = \varnothing$ somit ist D offen und nicht abgeschlossen.

2.1.2 Partielle Ableitungen 1. und 2. Ordnung

1. Ordnung:
$f_x = (ln\, y - x) + x \cdot (-1) = ln\, y - 2x$
$f_y = \frac{x}{y}$

2. Ordnung:
$f_{xx} = -2$
$f_{xy} = \frac{1}{y}$
$f_{yx} = \frac{1}{y}$
$f_{yy} = -\frac{x}{y^2}$

2.1.3 Gradientenvektor

$grad(x, y) = (f_x, f_y) = (ln\, y - 2x\,,\, \frac{x}{y})$

2.1.4 Anstieg

$grad_f(1,1) = (-2,1)$ zeigt in Richtung des größten Anstieges
$-(-2,1) = (2,-1)$ zeigt in Richtung des kleinsten Anstieges

2.1.5 Höhenlinie

Anstieg $\frac{\partial f}{\partial \vec{v}}(\underline{a}) = 0$ da entlang der Höhenline
Tangentengleichung:
$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + k \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \vec{a} + k \cdot \vec{i}$ Vektor $\vec{i} \perp grad_f(\underline{a})$
eventuell umformen $y = ...$

2.1.6 Differential

$df(\underline{x}, \underline{dx}) = \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) \cdot dx + \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) \cdot dy$

$\frac{\partial f}{\partial x} = f_x$ $\frac{\partial f}{\partial y} = f_y$
daraus folgt:
$df(\underline{x}, \underline{dx}) = (ln\, y - 2x)dx + \frac{x}{y} \cdot dy = (ln\, y - 2x, \frac{x}{y}) \cdot \begin{pmatrix} dx \\ dy \end{pmatrix}$

2.1.7 1. Taylorpolynom

$T_1(x,y) = f(\underline{a}) + df(\underline{a}, \underline{dx}) = f(\underline{a}) + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(\underline{a}) \cdot (x - a_i)$
$T_1(x,y) = -2x + y + 2$

2.1.8 Hessematrix, 2. Taylorpolynom

Hessematrix: $H_f(x,y) = \begin{pmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{yx} & f_{yy} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & \frac{1}{y} \\ \frac{1}{y} & -\frac{x}{y^2} \end{pmatrix}$
$T_2(x,y) = T_1 + \frac{1}{2} d^2 f(\underline{a}, \underline{dx}) = T_1 + \frac{1}{2} \underline{dx} \cdot H_f(x,y) \cdot \underline{dx}^T$
einsetzen..

2.1.9 Tangentialebene

$z = T_1(x,y)$
$z = -2x + y + 2$

daraus folgt:
$\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \circ \vec{x} = -2 = d$

der Punkt $\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$ liegt unterhalb da $d = -4$ für den Punkt ist.

2.1.10 lokalen Extremwerte

$grad_f(x, y) = \underline{0}$
daraus ergibt sich ein Gleichungssystem:
$lny - 2x = 0$
$\frac{x}{y} = 0$
Lösungen: $x = 0$ und $y = 1$
lokale extremwertverdächtige Stelle: $(0, 1)$
Überprüfung mit Hessematrix:
$det(H_f(0, 1)) = -1 < 0$ daher Sattelpunkt

2.2 Aufgabe 2

$R = c \cdot \frac{l}{r^2}$ mit $c = const$, $l = 100mm = 10^{-1}m$, $r = 10^{-3}m$ und
$|\Delta l| \leq 5cm = 5 \cdot 10^{-1}$, $|\Delta r| \leq 10^{-1}mm = 10^{-4}m$

absoluter Fehler:
$dR = R_l \cdot dl + R_r \cdot dr = \frac{c}{r^2} \cdot dl - \frac{2cl}{r^3} \cdot dr$
$|\Delta R| = \frac{c}{r^2} \cdot \Delta l - \frac{2cl}{r^3} \cdot \Delta r$
nun kann man für Δl und Δr die oberen Grenzen einsetzen und erhält eine Abschätzung für den absoluter Fehler.

relativer Fehler: $= |\frac{\Delta R}{R}|$

2.3 Aufgabe 3

2.3.1 Lokale Extremalstellen

$f(x, y) = \frac{1}{2} \cdot (x^2 + 1) - 2y(2x + 7) + 3x + 9y^2$

notwendige Bedienung:
$f_x = x - 4y + 3$

$f_y = -4x + 18y - 14$
$f_x = 0$
$f_y = 0$
daraus folgt ein Gleichungssystem:
$0 = x - 4y + 3$
$0 = -4x + 18y - 14$
mittels Gauß-Jordan, Einsetzungsverfahren, oder sonstigem Lösen:
erhalten die Lösungen:
$x = 1$ und $y = 1$ also $\underline{a} = (x, y) = (1, 1)$

hinreichende Bedingung:
Hessematrix aufstellen:
$H_f(x, y) = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$
$k = det(H_f(1, 1)) = 2 - 1 = 1$
wenn $k > 0$:
und $f_{xx}(\underline{a}) > 0$ dann lokale Minimalstelle,
wenn $f_{xx}(\underline{a}) = 0$ keine Aussage
wenn $f_{xx}(\underline{a}) < 0$ dann lokale Maximalstelle
wenn $k = 0$: keine Aussage
wenn $k < 0$: Sattelpunkt

in unserem Fall ist $\underline{a}$ somit eine lokale Maximalstelle.

2.3.2 Lokale Extremstellen

analog zur vorhergenden Aufgabe

rechne ich vielleicht noch durch

2.4 Aufgabe 4-Lagrange

2.4.1 a)

$f(x, y) = x^2 + y^2$ mit $5x^2 + 5y^2 - 8xy = 18$

Stelle die Nebenbedingung um:
$5x^2 + 5y^2 - 8xy - 18 = 0$ $g(x, y) = 5x^2 + 5y^2 - 8xy - 18$

Lagrange Funktion aufstellen:
$L(x, y, \lambda) = f(x, y) + \lambda \cdot g(x, y)$

Partiellen Ableitungen:

$L_x(x, y, \lambda) = 2x + \lambda(10x - 8y)$
$L_y(x, y, \lambda) = 2y + \lambda(10y - 8x)$
$L_\lambda(x, y, \lambda) = g(x, y)$

diese werden nun Null gesetzt:

1. $0 = 2x + \lambda(10x - 8y)$
2. $0 = 2y + \lambda(10y - 8x)$
3. $0 = 5x^2 + 5y^2 - 8xy - 18$ // unsere Nebenbedingung!

stelle 1 und 2 nach λ um:
$\lambda = \frac{-2x}{10x-8y}$ mit $10x - 8y \neq 0$ (müssen wir später betrachten)
$\lambda = \frac{-2y}{10y-8x}$ mit $10y - 8x \neq 0$ (auch später)
Gleichsetzen:
$\frac{-2x}{10x-8y} = \frac{-2y}{10y-8x}$
erhalten nach Umformen:
$x^2 = y^2$
1. Fall: $x = y$
in 3 einsetzen:
$10y^2 - 8y^2 - 18 = 0$
erhalten:
$y = \pm 3$
somit $x = \pm 3$
2. Fall: x=-y
auch wieder einsetzen in 3:
$10y^2 + 8y^2 - 18 = 0$
erhalten:
$y = \pm 1$
somit
$x = \pm 1$ (aber immer das entgegengesetzte Vorzeichen)

Lösungen: (x, y)
$(3, 3)$ //1. Fall
$(-3, -3)$ // 1. Fall
$(1, -1)$ // 2. Fall
$(-1, 1)$ // 2. Fall

Überprüfung ob durch die Umformungen Lösungen verschwunden sind (siehe 2.4.1)
$10x - 8y = 0$
aus 1 folgt: $2x = 0$ somit $x = 0$
$10y - 8x = 0$
aus 2 folgt: $2y = 0$ somit $y = 0$
steht beides im Widerspruch mit 3!

2.4.2 b)

analog zu a)

mach ich eventuell später noch

2.5 Aufgabe 5

Skizze erforderlich

später vielleicht

Abstand: $f(x,y) = \sqrt{(x-0)^2 + (y-a)^2}$ soll minimal sein
Nebenbedingung: $y = 4x^2 => x^2 = \frac{y}{4}$
Es reicht dass $x^2 + (y-a)^2$ minimal wird:
$g(x,y) = x^2 + y^2 - 2ya + a^2$
Nebenbedingung einsetzen:
$g(y) = \frac{y}{4} + y^2 - 2ya + a^2$
Ableiten:
$g'(y) = \frac{1}{4} + 2y - 2a$
$0 = \frac{1}{4} + 2y - 2a$
$y = a - \frac{1}{8}$
für x folgt dann: $x^2 = \frac{a-\frac{1}{8}}{4} => x_{1,2} = \pm\sqrt{\frac{a-\frac{1}{8}}{4}}$
$g(y)$ ist eine nach oben geöffnete Parabel, daher ist y ein Minimum:
für $a \geqq \frac{1}{8}$ -> $y = a - \frac{1}{8}$ und $x_{1,2} = \pm\sqrt{\frac{a-\frac{1}{8}}{4}}$
für $a < \frac{1}{8}$ -> existiert x nicht, der Scheitelpunkt der Parabel ist dann die Lösung, $(y = 0\ ,\ x = 0)$

2.6 Aufgabe 6

$f(x,y) = x^2y + 2y^2 + 2x^2 + 10$
$D = \{(x,y) \mid -1 \leq x \leq 1, -1 \leq y \leq 1\}$

Globale Extremwertstellen und globale Extremwerte von f auf D:

$f_x(x,y) = 2xy + 4x$
$f_y(x,y) = x^2 + 4y$

Null setzen: erhalten Gleichungssystem:
$0 = 2xy + 4x$
$0 = x^2 + 4y$
mit irgendwas Lösen (Maple, Einsetzungsverfahren, Gleichsetzungsverfahren)
erhalten für x die Lösungen: $x = 0$ und $x = 2$ (entfällt, da nicht in D)
für $x = 0$, ist $y = 0$

berechnen: $f(0,0) = 10$
nun müssen wir noch schauen was am Rand passiert:
Rand besteht aus Punkten, daher kann man die Punkte einfach einsetzen:
$f(-1,-1) = 13$
$f(-1,1) = 15$
$f(1,-1) = 13$
$f(-1,-1) = 13$

Für die globalen Maximalwerte / Minimalwerte ergibt sich dann folgendes:
$max\{10, 13, 15, 13, 13\} = 15$ somit ist globale Maximalstelle: $(x, y) = (-1, 1)$
$min\{10, 13, 15, 13, 13\} = 10$ somit ist globale Minimalstelle: $(x, y) = (0, 0)$

3 Gewöhnliche Differentialgleichungen

3.1 Aufgabe 1

1. Ordnung:
$y' = f(x, y)$
wenn f_x, f_y exisiteren und in der Umgebung von x_0, y_0 f_y stetig ist,
existiert genau eine Lösung durch x_0, y_0

3.2 Aufgabe 2

existiert genau eine Lösung durch jeden Punkt von D, zu zeigen mit dem Kriterium aus vorhergehender Aufgabe.

3.3 Aufgabe 3

(A)=DGL mit getrennten Variablen
(B)=Ähnlichkeitsdifferentialgleichung
(C)=Lineare DGL

1. (A)
2. (A)
3. (B)
4. (B)
5. kein Plan?
6. (C) inhomogen

7. (C) inhomogen

Lösungsansätze: wenn $y = y(t)$

(A) y' wird durch $\frac{dt}{dy}$ ersetzt und dann "umgestellt" + Integriert, Konstante nicht vergessen

(B) forme das Teil solange um bis man: $y' = H(\frac{y}{t})$ hat, dann substituieren, einsetzen, (auch y' ersetzen) , und meist dann (A)

(C)

homogen:

Funktion muss die Form $y(t) = e^{\lambda t}$ haben, bilde die Ableitungen, einsetzen und λ berechnen, die Lösung ist dann: $y_h = c_1 \cdot e^{\lambda_1 t} + ... + c_n \cdot e^{\lambda_n t}$

Problem bei komplexen Lösungen für λ , dann wird

$y_h = c_1 \cdot e^{REALANTEIL \cdot t} \cdot cos(|Imaginäranteil| \cdot t) + c_2 \cdot e^{REALANTEIL \cdot t} \cdot sin(|IMAGINÄRANTEIL| \cdot t) +$ reelle Lösungen nach vorhergehender Formel

inhomogen:

erstmal die Störfunktion auf Null setzen und homogene Lösung bestimmen, anschließend, kann man die Ausgangsfunktion y "vermuten" ,

Störfunktion:

$P(t)$(Polynom n-ten Grades) dann ist y auch ein Polynom von dem Grade n

e^x dann ist y auch eine e Funktion: $Ae^{tx} + c$

$cos(\alpha t)$ / ,$sin(\alpha t)$ y hat den Aufbau: $Acos(\alpha t) + Bsin(\alpha t)$

alle möglichen Arten können auch additiv verbunden sein, dann addiert sich auch bei y die Möglichkeiten.

Hat man eine Vermutung über y , leitet man ab (die Ableitungen die man braucht), und setze in die DGL ein, + anschließendem Koeffizientenvergleich, führt auf Gleichungssystem, welches man lösen muss.

auch möglich über Variation der Konstanten, da wird in der allgemeinen Lösung der homogenen DGL, die Konstanten $c_1..c_n$ durch Funktionen $c_1(t)..c_n(t)$ ersetzt, anschließend einsetzen , und die c's bestimmen.

3.4 Aufgabe 4

3.4.1 Lineare Gleichung?

wenn $L(\alpha(x + y)) = \alpha L(x) + \alpha L(y)$ ist

X,Y müssen Vektorräume über den Körper K sein.

3.4.2 homogene lineare Gleichung

U ist linearer Unterraum von X

3.4.3 inhomogene lineare Gleichung

L= spezielle Lösung + Lösung der homogenen GL

3.5 Aufgabe 5

3.5.1 siehe Lineare GL

3.5.2 siehe A3 c)

3.5.3 siehe A3 c)

3.5.4 ...

allgemeine Lösung: $y = c_1 \cdot e^{\lambda_1 t} + ...$
dann ist die Basis:
$\{e^{\lambda_1 t}, ...\}$

...=kein Bock

3.5.5 ...

3.5.6 ...

3.6 Aufgabe 6

$\dot{\vec{r}} = A \cdot \vec{r}$
$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}$

3.6.1 lineare homogene Gleichung?

$\Phi : V \to W \quad V, W$ sind R-Vektorräume
$\dot{\vec{r}} - A \cdot \vec{r} = 0_W$
$\Phi(\vec{r}) = \dot{\vec{r}} - A \cdot \vec{r}$
$V = C^1(R^1, R^2)$
$W = C^0(R, R^2)$
zeigen dass Φ eine lineare Abbildung ist, Eigenschaften siehe Aufgabe 4

U ist dann ein linearer Unterraum von $C^1(R^2, R)$

denke dass hier die beiden R hochs gedreht werden müssen.. meine Aufzeichnungen geben aber nicht mehr her

3.6.2 Lösungskurven

Ansatz:
$\vec{r}(t) = e^{\lambda t} \cdot \vec{x}$ wobei $\vec{x}$ konstanter Vektor ist
Ableiten, einsetztten, und Eigenwertgleichung lösen,
für jedes Eigenwertpaar $(\lambda, \vec{x})$ ist $e^{\lambda t} \cdot \vec{x}$ eine Lösung des DGL-Systems
allgemeine Lsg:
$c_1 e^{\lambda_1 t} \vec{x_1} + ...$

3.6.3 Phasenbahn/portrait

kein Bock .. ist eh unwahrscheinlich dass es dran kommt.. hoff ich mal..eventuell wenns dran kommt ergänz ich es noch

4 Lösungsalgorithmen

4.1 Lineare Algebra

4.1.1 Grundbegriffe

- *Vektorraum:*

(K,+,.) = Körper ; (V,+) = abelsche Gruppe, und
$u, v \in V$ $\alpha, \beta \in K$
$(\alpha + \beta) \cdot u = (\alpha u) + (\beta u)$
$\alpha(u + v) = (\alpha u) + (\alpha v)$
$\alpha(\beta v) = (\alpha\beta)v$
$1u = u$
$V \neq \varnothing$

- *Linearkombination:*

$\alpha_1 \cdot \vec{u_1} + \ldots + \alpha_n \cdot \vec{u_n} = \vec{b}$

- *lineare Hülle*

$[\overrightarrow{a}] = \{\overrightarrow{x} \mid \exists\alpha \in K : x = \vec{\alpha} \cdot \vec{a}\}$

- *Erzeugendensystem*

$M \subseteq V$ M heißt dann erzeugenden System eines linearen Unterraumes $U \subseteq V$ falls $[M] = U$

- *Basis*

Vektormenge eines minimales Erzeugendensystem, d.h. die Vektoren des Erzeugendensystems sind linear unabhängig

- *Dimension*

Anzahl der Basisverktoren

- *linearer Unterraum*

Eigenschaften
$\vec{0} \in U$
$\vec{a}, \vec{b} \in U \rightarrow \vec{a} + \vec{b} \in U$
$\vec{a} \in U \rightarrow \alpha \cdot \vec{a} \in U$

- *affiner Unterraum*

Eigenschaften
$T \subseteq R^n$
$T = \vec{r_0} + U$ wenn $\vec{r_0} \in R^n$ und U linearer Unterraum
$dim(T) = dim(U)$

- *Dimension*

=Anzahl Basisvektoren = n-rg(A)

- *Rang*

=Anzahl Stufen in der Matrix (Umformung mittels Gauß-Jordan)

4.1.2 Basis angeben

$A\vec{x} = \vec{b}$
mittels Gauß-Jordan lösen
(Stufenmatrix)
Parameterform ermitteln

4.1.3 Orthogonales Komplement

$U = [\vec{a_1}, \vec{a_2}, ...]$
Lösen von:
$$\begin{pmatrix} \vec{a_1}^T \\ \vec{a_2}^T \\ . \\ . \end{pmatrix} \cdot \vec{x} = \vec{0}$$ mittels Gauß-Jordan, (Parameterlösung)

4.1.4 Lotfußpunkt

A = Basisvektoren der Ebene als Matrix
$\vec{r_0}$ =Stützvektor der Ebene
$\vec{r_1}$ =Punkt von dem aus das Lot gefällt werden soll
$\vec{p}$ =alle Parameter der Ebene als Vektor z.b. $\begin{pmatrix} s \\ t \end{pmatrix}$
Lösen:
$A^T(\vec{r_1} - \vec{r_0}) = A^T \cdot A \cdot \vec{p}$
Mittels Matrizenmultiplikation ausrechnen und dann mit Gauß-Jordan lösen:
erhalten dann konkrete Werte für $\vec{p}$ die man dann in die Ebenengleichung einsetzen kann, und erhält den Lotfußpunkt,

Abstand Punkt-Ebene:
$d(\vec{r_1}, \Gamma) = ||\vec{d}||$ $\vec{d}$ ist der Vektor zwischen $\vec{r_f}$und $\vec{r_1}$ ($\vec{d} = \vec{r_f} - \vec{r_1}$)

4.1.5 Ausgleichsgerade

$p(x_i) = a_0 + a_1 \cdot x_i$

$A = \begin{pmatrix} 1 & x_1 \\ 1 & . \\ 1 & x_n \end{pmatrix}$ Enthält originale x Werte, und eine Spalte mit "1"
$\vec{a} = \begin{pmatrix} a_o \\ a_1 \end{pmatrix}$
$\vec{y}$= Alle originalen y - Werte als Vektor, passend zu den x- Werten in A
Löse nun:
$A^T A\vec{a} = A^T\vec{y}$
mit Matrizenmultiplikation vereinfachen, anschließend Gauß-Jordan

4.1.6 Determinanten

Vorzeichenmatrix beachten: $\begin{pmatrix} + & - & + & ... \\ - & + & - & ... \\ + & - & + & ... \\ ... & ... & ... & ... \end{pmatrix}$
Eine Spalte/Zeile aussuchen und nach dieser dann Entwickeln.

Determinante gibt vorzeichenbehaftetes Volumen des Parallelepipels an

4.1.7 Invertierbar?

wenn $det(A) \neq 0$
$det(A^{-1}) = \frac{1}{det(A)}$

4.1.8 homogenes LGS

$A\vec{x} = \vec{0}$
besitzt nicht triviale LSG, wenn $det(A) = 0$

4.1.9 inhomogenes LGS

$A\vec{x} = \vec{b}\ \vec{b} \neq \vec{0}$

- genau eine Lösung: wenn A invertierbar ist, somit $det(A) \neq 0$
- keine Lösung: wenn Gauß-Jordan keine Lösung hat $(det(A) = 0)$
- unendlich viele Lösungen: wenn Gauß-Jordan unendlich viele Lsg hat $(det(A) = 0)$

4.1.10 Hesseform

$\vec{n} \circ \vec{x} = d$
$\vec{n}^T \cdot \vec{x} = d$

4.1.11 Halbräume

Punkt in Hesseform einsetzen und schauen ob Ergebnis $> < =$ d ist.
($>$ "oberhalb", $<$ "unterhalb" , $=$ "auf" der Ebene)

4.1.12 Spiegelung

$A^T = A = A^{-1}$
$det(A) = \pm 1$

Matrizendarstellung von Spiegelungen an Ursprungsebene:
$M \cdot (Eingaben) = (Ausgaben)$
$M = (Ausgaben) \cdot (Eingaben)^{-1}$
$(Eingaben) = (\vec{a}, \vec{b}, \vec{a} \times \vec{b})$
$(Ausgaben) = (\vec{a}, \vec{b}, \vec{-a} \times \vec{b})$
wobei $\vec{a}, \vec{b} \in$Unterraum an dem gespiegelt wird

Spiegelung an nicht Ursprungsebene:
$F(\vec{x}) = M\vec{x} + \vec{b} = L(\vec{x}) + \vec{b}$
$L(\vec{x})$ wie zuvor bestimmen mit Ursprungsebene.
$\vec{b}$ bestimmen mit: $\vec{b} = \vec{r_0} - M \cdot \vec{r_0}$ ($\vec{r_0}$ist Stützvektor der Ebene)

4.1.13 Drehung

nur $det(A) = 1$

4.1.14 Eigenwerte/vektoren/raum

- $A \cdot \vec{x} = \lambda\vec{x} \Leftrightarrow (\lambda E - A) \cdot \vec{x} = \vec{0}$ (Eigenwertgleichung)
- $det(\lambda E - A) = 0$ die λ Werte berechnen $=$ Eigenwerte
- Eigenvektoren durch einsetzen der λWerte in die Eigenwertgleichung berechnen (Gauß Jordan, Parameterlösung)

- Eigenvektoren stehen senkrecht zueinander

$D = T^T AT = T^{-1}AT$
D ist dann die Matrix mit allen Eigenvektoren auf der Hauptdiagonalen (Rest= Null)

$$D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & .. & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_n \end{pmatrix}$$

T ist dann die Matrix mit den normierten Eigenvektoren:
$T = \frac{1}{||e\vec{v}_1||} \cdot (e\vec{v}_1, e\vec{v}_2..)$ (wenn die ev gleiche Länge haben)

4.1.15 Hauptachsentransformation

Funktion in die Form:
$q(\underline{x}) = (\underline{x})A \cdot (\underline{x})^T$
bringen.
Anschließend Transformation mit $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = T \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$
$q(x, y) = (u, v)T^T AT \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$
$T^T AT = D$ // siehe Eigenwerte
ausrechnen mit Matrizenmultiplikation.

Anleitung zum Zeichnen:

1. Standard (x,y) Koordinatensystem
2. Achsen u und v mit Hilfe der Eigenverktoren einzeichnen, Richtung beachten
3. Hyperbel / Ellipsen mit einem Hilfsrechteck in das (u,v) Koordinatensystem einzeichnen

4.2 Differentialrechnung mit Funktionen mehrerer Veränderlichen

4.2.1 Rand

∂D =Rand
offen wenn $\partial D \cap D = \varnothing$
abgeschlossen wenn $\partial D \subseteq D$
auch beides gleichzeitig möglich

4.2.2 Gradient

$grad_f(x, y, ..) = (f_x, f_y, ...)$
zeigt in Richtung des maximalen Anstieges

4.2.3 Anstieg im Punkt $a = (a_1, a_2 ...)$

$\frac{\partial f}{\partial \underline{v}} f(\underline{a}) = \frac{1}{||\underline{v}||} grad_f(\underline{a}) \cdot \underline{v}$

4.2.4 Tangente im Punkt $a = (a_1, a_2, ...)$

senkrecht zum Gradienten
Anstieg=0 entlang der Höhenline
Gleichung: Punkt $\underline{a}$ +(vektor der senkrecht zum Gradienten im Punkt steht)$\cdot t$

4.2.5 Differential im Punkt $a = (a_1, a_2, ...)$

$$df(\underline{x}, \underline{dx}) = \sum^{alle\,Komponenten\,von\,\underline{x}} \frac{\partial f}{\partial x_i} dx_i \qquad dx_i = (x_i - a_i)$$

4.2.6 Hessematrix

$$H_f(x, y) = \begin{pmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{yx} & f_{yy} \end{pmatrix}$$

4.2.7 1. Taylorpolynom

$T_1(x, y) = f(\underline{a}) + df(\underline{a}, \underline{dx})$

4.2.8 Tangentialebene

$z = T_1(x, y)$
in Hesseform bringen

4.2.9 2. Taylorpolynom

$T_2(x, y) = T_1(x, y) + \frac{1}{2} \cdot \underline{dx} \cdot H_f \cdot \underline{dx}^T$

4.2.10 relativer Fehler

$= |\frac{df}{F}|$
df ist absoluter Fehler

4.2.11 lokale Extremstellen /Extremwerte

$grad_f = \underline{0}$
Stellen berechnen
schauen ob $det(H_f(an\, der\, verdächtigen\, Stelle))$
$>$0 dann wenn
$f_x > 0$ Minimalstelle
$f_x = 0$ keine Aussage
$f_x < 0$ Maximalstelle
$=$0 keine Aussage
$<$0 Sattelpunkt

lokale Extremwerte sind dann die Funktionswerte der lokalen Extremstellen

4.2.12 globale Extremwerte

lokale Extremwerte und Rand/Randpunkte des Definitionsbereiches betrachten

4.2.13 Multiplikatorregel von Lagrange

$f(\underline{x}) = ...$ mit Nebenbedingung: $0 = g(\underline{x})$
$L(\underline{x}, \lambda) = f(\underline{x}) + \lambda \cdot g(\underline{x})$
partielle Ableitungen bilden + Gleichungssystem lösen, und eventuell ausgeschlossene Werte testen (bei Divisionen!! Null und so^^)

4.3 gewöhnliche Differentialgleichungen

4.3.1 Existenz/Eindeutigkeit

1. Ordnung:
$y' = f(x, y)$
wenn f_x, f_y exisiteren und in der Umgebung von x_0, y_0 f_y stetig ist,
existiert genau eine Lösung durch x_0, y_0

4.3.2 DGL mit getrennten Variablen

$y' = g(t) \cdot h(y)$ $y = y(t)$
$y' = \frac{dy}{dt}$
einsetzen, sortieren (alles mit y auf eine Seite, alles mit t auf die Andere)
Integrieren und die Konstante nicht vergessen!

4.3.3 Ähnlichkeits-DGL

$y' = H(\frac{y}{t})$
Substituieren, einsetzen und wie mit getrennten Variablen lösen

4.3.4 homogene lineare DGL

für $y = e^{\lambda t}$ und die Ableitungen einsetzen
erhalten Gleichung nur mit Potenzen von λ, nach λ lösen
allgemeine Lösung= $y_h = c_1 e^{\lambda_1 t} + ... + c_n e^{\lambda_n t}$

Problem bei komplexen Lösungen für λ , dann wird
$y_h = c_1 \cdot e^{REALANTEIL \cdot t} \cdot cos(|Imaginäranteil| \cdot t) + c_2 \cdot e^{REALANTEIL \cdot t} \cdot sin(|IMAGINÄRANTEIL| \cdot t) +$ reelle Lösungen nach vorhergehender Formel

4.3.5 inhomogene lineare DGL

zuerst die homogene DGL lösen, y_h ermitteln.
anschließend spezielle Lösung y_s mit:
“raten der Ausgangsgleichung” oder variation der Konstanten ermitteln.
allgemeine Lösung der inhomohenen linearen DGL= $y_{in} = y_s + y_h$

“raten der Ausgangsgleichung”:
Störfunktion:
$P(t)$ (Polynom n-ten Grades)dann ist y auch ein Polynom von dem Grade n
e^x dann ist y auch eine e Funktion: $Ae^{tx} + c$
$cos(\alpha t)$ / ,$sin(\alpha t)$ y hat den Aufbau: $Acos(\alpha t) + Bsin(\alpha t)$
alle möglichen Arten können auch additiv verbunden sein, dann addiert sich auch bei y die Möglichkeiten.

Hat man eine Vermutung über y , leitet man ab (die Ableitungen die man braucht), und setze in die DGL ein, + anschließendem Koeffizientenvergleich, führt auf Gleichungssystem, welches man lösen muss.

auch möglich über Variation der Konstanten, da wird in der allgemeinen Lösung der homogenen DGL, die Konstanten $c_1..c_n$ durch Funktionen $c_1(t)..c_n(t)$ ersetzt, anschließend einsetzen , und die c's bestimmen.