

Aufgaben Vektorrechnung

Steve Göring, stg7@gmx.de
8. November 2013

„Diese ganze Crew scheint allmählich wie besessen zu sein von Mr. Spock.“
– STAR TREK III- KIRK

1 Beträge und Mittelpunkte

Gegeben sind jeweils die Punkte A und B bestimme $|\overrightarrow{AB}|$ und M_{AB} (Mittelpunkt der Strecke AB)!

a)

$$A(1/2/3), B(8/2/ - 1)$$

b)

$$A(8/0/ - 2), B(-1/5/ - 3)$$

2 Teilung

Bestimme in welchen Teilungsverhältnis der Punkt C die Strecke AB teilt!

a)

$$A(0/2/ - 2), B(2/5/ - 1), C(1/4.5/ - 1.5)$$

b)

$$A(-1/12/3), B(9/ - 8/ - 7), C(0/10/2)$$

3 Parameter-Misch

Gegeben sind die Punkte $A(c/3/c + 2)$ und $B(7/8/9)$

a)

Für welchen Wert von c ist die Strecke AB genau 42 Längeneinheiten lang?

b)

Für welchen Wert von c steht der Vektor \overrightarrow{AB} senkrecht zu $\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$?

4 lineare Abhängigkeit

Gegeben sind die Vektoren $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$, überprüfe jeweils ob die Vektoren linear abhängig oder unabhängig sind?

a)

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} \quad \vec{c} = \begin{pmatrix} -2 \\ 8 \\ 2 \end{pmatrix}$$

b)

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ -3 \end{pmatrix} \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} -2 \\ -6 \\ -9 \end{pmatrix} \quad \vec{c} = \begin{pmatrix} 0 \\ -10 \\ -10 \end{pmatrix}$$

5 Parallelogramm

Bestimme den Punkt D , so dass $ABCD$ ein Parallelogramm bildet.

a)

$$A(4/1/3), B(2/6/-2), C(-3/5/1)$$

b)

$$A(2/2/-1), B(3/4/1), C(7/0/3) \text{ Was müsste zusätzlich erfüllt sein, wenn } ABCD$$

▷ ein Rechteck sein soll, oder

▷ ein Rombus?

6 Dreiecke

Bestimme den Flächeninhalt und die Innenwinkel des Dreiecks ABC

a)

$$A(-3/1/0), B(5/-3/8), C(2/0/8)$$

b)

$$A(6/-1/3), B(2/3/3), C(2/-1/7)$$

7 Parameterform von Geraden

Bestimme die Parameterform der Gerade, welche durch die Punkte A und B verläuft.

a)

$$A(5/4 / -1) \text{ und } B(3/3/2)$$

b)

$$A(-3/4 / -1) \text{ und } B(-1/3/1)$$

c)

$$A(0 / -3/9) \text{ und } B(4/3/7)$$

Bestimme weiterhin auch den Durchstoßpunkt der jeweiligen Gerade mit der $x - y$ -Ebene (Hinweis: Punkte der $x - y$ -Ebene haben die Form $P(x/y/0)$, wie sehen Punkte der $y - z$ -Ebene aus?)

8 Lage von Geraden

Bestimme die gegenseitige Lage der angegebenen Geraden g_1, g_2

a)

$$g_1 : \vec{x} = \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$$
$$g_2 : \vec{x} = \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

b)

$$g_1 : \vec{x} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$
$$g_2 : \vec{x} = \begin{pmatrix} 5 \\ 8 \\ 11 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -4 \end{pmatrix}$$

(Hinweis: Untersuche zunächst ob die beiden Geraden parallel verlaufen, dazu ist es nötig zu überprüfen ob die Richtungsvektoren vielfaches voneinander sind. Anschließend kann der Schnittpunktansatz (also das Gleichsetzen beider Gleichungen) stattfinden, je nachdem existiert dann genau ein Schnittpunkt oder nicht.)

9 Gerade und Orthogonale

Bestimme zur gegebenen Gerade g **eine** Gerade h , welche senkrecht zu g steht.

a)

$$g : \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 7 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

b)

$$g : \vec{x} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}$$

10 Geradenschaar

Wie liegen die Geraden der Schaar g_a zueinander?

a)

$$g_a : \vec{x} = \begin{pmatrix} a \\ a+1 \\ -1 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

b)

$$g : \vec{x} = \begin{pmatrix} -2 \\ -3 \\ -9 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} a \\ 2a+1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

11 Abstände

Bestimme den Abstand des Punktes P zur Geraden g

a)

$P(5/5/7)$ und

$$g : \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

b)

$P(11/10/9)$ und

$$g : \vec{x} = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}$$

(Hinweis: Lotfußpunkt aufstellen, Lotfußvektor steht senkrecht zur Richtung der Gerade, daraus resultiert eine lösbare Gleichung)

12 Komplexe Aufgabe

In einem kartesischen Koordinatensystem sind die Punkte $A(11/2/7)$, $B(11/10/1)$, $F(6/6/4)$ und $S(6/9/8)$ gegeben.

a)

Berechnen Sie Umfang und Flächeninhalt des Dreiecks ABF !

b)

Durch die Punkte A, B, F und S wird eine dreiseitige Pyramide mit der Grundfläche ABF bestimmt. Zeigen Sie, dass die Strecke \overline{FS} die Höhe der Pyramide ist! Ermitteln Sie das Volumen der Pyramide $ABFS$!

c)

Bestimmen Sie den Winkel α zwischen der Seitenkante AS und der Grundkante AF der Pyramide $ABFS$!

d)

Die Gerade g verläuft durch die Punkte A und F . Auf der Geraden g liegt ein Punkt C derart, dass F Mittelpunkt der Strecke AC ist. Die Gerade h verläuft durch die Punkte B und F . Auf dieser Geraden h liegt ein Punkt D derart, dass F Mittelpunkt der Strecke BD ist. Ermitteln Sie die Koordinaten der Punkte C und D ! Welches spezielle Viereck wird durch die Punkte A, B, C und D bestimmt? Begründen Sie Ihre Aussage!

13 Aufgaben ohne Hilfsmittel

13.1 .

Gegeben sind die Vektoren $\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ c \\ 4 \end{pmatrix}$ und $\vec{b} = \begin{pmatrix} -c-4 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$

Bestimme c , so dass die Vektoren orthogonal zueinander sind!

13.2 .

Zeigen Sie, dass die Punkte $H(2/1/ - 2)$, $S(3/2/ - 1)$ und $V(0/ - 1/6)$ ein Dreieck bilden. Untersuchen Sie, ob das Dreieck rechtwinklig ist.

13.3 .

Gegeben sind die Punkte $A(1/5/ - 2)$, $B(3/ - 5/4)$ und $C(7/ - 25/a)$. Durch die Punkte A und B verläuft die Gerade g . Bestimmen Sie den Parameter a so, dass der Punkt C auf g liegt.