Übungsaufgabe Vektoren

Steve Göring, stg7@gmx.de
7. Dezember 2013

„Diese ganze Crew scheint allmählich wie besessen zu sein von Mr. Spock.“
– Star Trek III- Kirk

1 komplexe Aufgabe

Gegeben sind die Punkte $A(0/0/0)$, $B(4/8/3)$, $C(4/10/5)$, $D(-4/-6/-1)$ und $S(3/2/3)$.

(a)

Zeige, dass die Punkte A, B, C, D in einer Ebene liegen, also zeige, dass die Vekotren $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ und $\overrightarrow{AD}$ linear abhängig sind.

(b)

Die Punkte A, B, C, D bilden in dieser Reihenfolge ein Viereck. Zeige, dass das Viereck ein Trapez ist, welches nicht gleichschenklig ist! Berechne den Flächeninhalt des Trapezes!

(c)

Zeige, dass der Punkt $M(\frac{4}{3}/\frac{10}{3}/\frac{5}{3})$ der Schnittpunkt der Diagonalen des Vierecks $ABCD$ ist! Das Viereck und der Punkt S bilden eine Pyramide. Weise nach, dass $\overline{MS}$ die Höhe der Pyramide ist! Und berechne anschließend das Volumen der Pyramide $ABCDS$!

(d)

Die x-y-Ebene und die Pyramidenkante $\overline{DS}$ haben einen Punkt F gemeinsam. Ermittle die Koordinaten des Punktes F und in welchem Verhältnis teilt der Punkt F die Kante $\overline{DS}$?

Lösung a) Aufstellen der Vektoren:

$$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 4 \\ 8 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} 4 \\ 10 \\ 5 \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{AD} = \begin{pmatrix} -4 \\ -6 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Lineare Abhängigkeit überprüfen:

$$\overrightarrow{AD} = t \cdot \overrightarrow{AB} + s \cdot \overrightarrow{AC}$$

$$\begin{pmatrix} -4 \\ -6 \\ -1 \end{pmatrix} = t \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 8 \\ 3 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 10 \\ 5 \end{pmatrix}$$

es folgt:

$$s = 1, t = -2$$

wzzw.

b) Aufstellen der Seitenvektoren (Skizze!)

$$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 4 \\ 8 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{BC} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{CD} = \begin{pmatrix} -8 \\ -16 \\ -6 \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{DA} = \begin{pmatrix} 4 \\ 6 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Es ist gut erkennbar, dass $-2 \cdot \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$ gilt, somit sind die Seiten $\overline{AB}$ und $\overline{CD}$ parallel. (genauer sind die anderen beiden Seiten nicht parallel, aber es ist nicht zwingend erforderlich diesen Nachweis zu erbringen)

Es soll auch gezeigt werden, dass das Trapez nicht gleichschenklig ist, dazu sind die Längen der Schenkel $\overline{BC}$ und $\overline{DA}$ zu berechnen:

$$|\overrightarrow{BC}| = \sqrt{0^2 + 2^2 + 2^2} = \sqrt{8}$$

$$|\overrightarrow{DA}| = \sqrt{4^2 + 6^2 + 1^2} = \sqrt{53}$$

Da $|\overrightarrow{BC}| \neq |\overrightarrow{DA}|$ folgt, dass das Trapez nicht gleichschenklig ist. wzzw.

Flächeninhalt des Trapez: Zerlegung in die Dreiecke ABD und ACD. Berechnung der Dreiecksflächen:

$$A_{ABC} = \frac{1}{2}\sqrt{|\overrightarrow{AB}|^2 \cdot |\overrightarrow{AC}|^2 - (\overrightarrow{AB} \circ \overrightarrow{AC})^2}$$

$$= \frac{1}{2}\sqrt{(4^2 + 8^2 + 3^2) \cdot (4^2 + 10^2 + 5^2) - (4 \cdot 4 + 8 \cdot 10 + 3 \cdot 5)^2}$$

$$A_{ABC} = \frac{1}{2}\sqrt{228}$$

$$A_{ACD} = \frac{1}{2}\sqrt{|\overrightarrow{AC}|^2 \cdot |\overrightarrow{AD}|^2 - (\overrightarrow{AC} \circ \overrightarrow{AD})^2}$$

$$= \frac{1}{2}\sqrt{(4^2 + 10^2 + 5^2) \cdot ((-4)^2 + (-6)^2 + (-1)^2) - (4 \cdot (-4) + 10 \cdot (-6) + 5 \cdot (-1))^2}$$

$$A_{ACD} = \frac{1}{2}\sqrt{912}$$

Gesamtfläche:

$$A_{ABCD} = A_{ABC} + A_{ACD} = \frac{1}{2}\sqrt{228} + \frac{1}{2}\sqrt{912} \approx 23\ FE$$

c) Für den Schnittpunkt müssen zwei Geraden aufgestellt werden. Die Gerade h verläuft entlang der Diagonale AC:

$$h : \vec{x} = \vec{a} + t \cdot \overrightarrow{AC}$$

$$h : \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 10 \\ 5 \end{pmatrix}$$

Weiterhin die Gerade g, welche durch BD verläuft:

$$g : \vec{x} = \vec{b} + s \cdot \overrightarrow{BD}$$

$$g : \vec{x} = \begin{pmatrix} 4 \\ 8 \\ 3 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} -8 \\ -14 \\ -4 \end{pmatrix}$$

Nun kann entweder der Schnittpunkt der Geraden g und h berechnet werden, oder es wird getestet ob der Punkt M auf beiden Geraden liegt (Test ist einfacher).

$$h : \vec{m} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 10 \\ 5 \end{pmatrix}$$

$$h : \begin{pmatrix} \frac{4}{3} \\ \frac{10}{3} \\ \frac{5}{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 10 \\ 5 \end{pmatrix}$$

es folgt $t = \frac{1}{3}$, M liegt also auf h.

$$g : \vec{m} = \begin{pmatrix} 4 \\ 8 \\ 3 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} -8 \\ -14 \\ -4 \end{pmatrix}$$

$$g : \begin{pmatrix} \frac{4}{3} \\ \frac{10}{3} \\ \frac{5}{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 8 \\ 3 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} -8 \\ -14 \\ -4 \end{pmatrix}$$

es folgt $s = \frac{1}{3}$, M liegt somit auch auch g. Daher ist M der Schnittpunkt der Diagonalen!

Damit $\overline{MS}$ die Höhe der Pyramide ist, muss $\overline{MS}$ senkrecht zur Grundfläche $ABCD$ sein. also (nur eine Möglichkeit):

$$\overrightarrow{MS} \circ \overrightarrow{AB} = 0$$

und

$$\overrightarrow{MS} \circ \overrightarrow{AC} = 0$$

ergibt eingesetzt:

$$\begin{pmatrix} \frac{5}{3} \\ -\frac{4}{3} \\ \frac{4}{3} \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 4 \\ 8 \\ 3 \end{pmatrix} = \frac{20}{3} - \frac{32}{3} + \frac{12}{3} = 0$$

und

$$\begin{pmatrix} \frac{5}{3} \\ -\frac{4}{3} \\ \frac{4}{3} \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 4 \\ 10 \\ 5 \end{pmatrix} = \frac{20}{3} - \frac{40}{3} + \frac{20}{3} = 0$$

Berechnen des Volumen der Pyramide $ABCDS$:

$$V = \frac{1}{3} \cdot A_{ABCD} \cdot h$$

mit

$$A_{ABCD} \approx 23\ FE$$

und

$$h = |MS| = \sqrt{(\frac{5}{3})^2 + (-\frac{4}{3})^2 + (\frac{4}{3})^2} = \frac{1}{3}\sqrt{57} \approx 2.5\ LE$$

also:

$$V \approx \frac{1}{3} \cdot 23 \cdot 2.5 \approx 19\ VE$$

d) Punkt F der x-y-Ebene haben die Form

$$\vec{f} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ 0 \end{pmatrix}$$

Die Kante $\overline{DS}$ lässt sich als Gerade q auffassen:

$$q : \vec{x} = \vec{d} + r \cdot \overrightarrow{DS}$$

konkret:

$$q : \vec{x} = \begin{pmatrix} -4 \\ -6 \\ -1 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 7 \\ 8 \\ 4 \end{pmatrix}$$

Ermittele nun den Punkt F mit:

$$\vec{f} = \vec{d} + r \cdot \overrightarrow{DS}$$

also:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ -6 \\ -1 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 7 \\ 8 \\ 4 \end{pmatrix}$$

für r folgt aus der letzten Zeile direkt $r = \frac{1}{4}$, somit ergibt sich:

$$\vec{f} = \begin{pmatrix} -\frac{9}{4} \\ -4 \\ 0 \end{pmatrix}$$

somit $F(-\frac{9}{4}/-4/0)$! Für das Teilungsverhältnis folgt aus $r = \frac{1}{4}$ ein Teilung im Verhältnis $1:5$!

2 Misch Masch

(a)

Wie muss t gewählt werden, damit die Punkte $A(1/2/3)$, $B(2/0/4)$. $C_t(t/1-t/t+2)$ auf einer Geraden liegen?

Lösung Aufstellen der Geradengleichung g durch die Punkte A und B:

$$g : \vec{x} = \vec{a} + s \cdot \overrightarrow{AB}$$

$$g : \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Mit C_t gleichsetzen:

$$\begin{pmatrix} t \\ 1-t \\ t+2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

es ergibt sich:

$$s = 2, t = 3$$

Somit liegt C_t nur für $t=3$ auf der Geraden.

(b)

Wie muss t gewählt werden, damit die Vektoren $\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ t \\ 2-t \end{pmatrix}$ und $\vec{b} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 9+t \end{pmatrix}$ senkrecht zueinander sind?

Lösung

$$\vec{a} \circ \vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ t \\ 2-t \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 9+t \end{pmatrix}$$

ergibt:

$$= 4 + 3t + (2-t) \cdot (9+t) = 0$$

es folgt für t:

$$t_1 = -\sqrt{26} - 2, t_2 = \sqrt{26} - 2$$

(c)

Durch die drei Punkte $A(2/3/1)$, $B(9/0/-2)$ und $C_t(-1/t/-3)$ wird ein Dreieck beschrieben. Bestimme eine Formel für den Flächeninhalt des Dreiecks in Abhängigkeit von t. Für welches t ist dieser Flächeninhalt ganzzahlig?

Lösung Flächeninhaltsformel:

$$A_{ABC} = \frac{1}{2}\sqrt{|\overrightarrow{AB}|^2 \cdot |\overrightarrow{AC}|^2 - (\overrightarrow{AB} \circ \overrightarrow{AC})^2}$$

Bestimmen der Seitenvektoren $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}$:

$$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 7 \\ -3 \\ -3 \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} -3 \\ t-3 \\ -4 \end{pmatrix}$$

$$A_{ABC} = \frac{1}{2}\sqrt{67 \cdot (9 + (t-3)^2 + 14) - (-21 - 3 \cdot (t-3) + 12)^2}$$

$$A_{ABC} = \frac{1}{2}\sqrt{58 \cdot t^2 - 402 \cdot t + 2144}$$

nun sucht man sich einen ganzzahligen Flächeninhalt aus, zum Beipsiel:

$$42\ FE = A_{ABC}$$

$$42 = \frac{1}{2}\sqrt{58 \cdot t^2 - 402 \cdot t + 2144}$$

somit folgt nach dem Lösen der Gleichung:

$$t = -\frac{\sqrt{325297} - 201}{58}, t = \frac{\sqrt{325297} + 201}{58}$$