

# Testprüfung (Abitur 2013)

Steve Göring, stg7@gmx.de  
3. April 2013

---

Bearbeitungszeit: 270 Minuten  
Zugelassene Hilfsmittel: Taschenrechner (nicht programmierbar, nicht grafikfähig),  
Tafelwerk

Name: \_\_\_\_\_

Punkte: A    \_\_\_/30  
          B    \_\_\_/20  
          C    \_\_\_/10  
          \_\_\_\_\_  
           $\Sigma$     \_\_\_/60

Note/%:                    / \_\_\_\_\_

---

„May the force be with you!“ – VIEL ERFOLG!

## 1 Analysis - A1

Für jede reelle Zahl  $t$  ist eine Funktion  $f_t$  gegeben durch:

GF03

$$y = f_t(x) = e^x \cdot (x^2 + t)$$

mit  $x \in \mathbb{R}$ .

a)

Untersuchen Sie den Graphen von  $f_{-3}$  auf Schnittpunkte mit den Koordinatenachsen und lokale Extrempunkte!

Geben Sie gegebenenfalls die Koordinaten dieser Punkte an!

Geben Sie das Verhalten von  $f_{-3}$  im Unendlichen an, und leiten Sie daraus mit Hilfe der eventuell ermittelten Extrema den Wertebereich der Funktion  $f_{-3}$  ab!

Begründen Sie, dass der Graph von  $f_{-3}$  zwei Wendepunkte besitzt!

Skizzieren Sie den Graphen von  $f_{-3}$  in einem geeigneten Intervall!

14 BE

b)

Eine Gerade  $g$  verläuft durch den Punkt  $P(0; f_{-3}(0))$  und steht senkrecht zur Tangente  $h$  an den Graphen von  $f_{-3}$  in diesem Punkt.

Die Tangente  $h$ , die Gerade  $g$  und die x-Achse begrenzen ein Dreieck. Bestimmen Sie die Größe der Innenwinkel und den Flächeninhalt des Dreiecks.

Bei Rotation dieses Dreiecks um die x-Achse entsteht ein Körper.

Berechnen Sie dessen Volumen!

8 BE

c)

Weisen Sie nach, dass die Funktion  $F_t$  mit

$$F_t(x) = e^x \cdot (x^2 - 2x + 2 + t) + 2013$$

eine Stammfunktion von  $f_t$  ist.

In welchem Verhältnis teilt die y-Achse die Fläche, die der Graph von Funktion  $f_{-3}$  und die x-Achse vollständig einschließen?

5 BE

d)

Untersuchen Sie, für welche Werte von  $t$  gilt:

Der Graph der Funktion  $f_t$  besitzt keine Schnittpunkte mit der x-Achse, aber zwei lokale Extrempunkte!

3 BE

Skizze!

Skizze!

## 2 Analysis - A2

Gegeben ist eine Funktion  $f$  durch

GF07

$$y = f(x) = \frac{6x^2 - x^3}{4}$$

mit  $x \in \mathbb{R}$ .

a)

Untersuchen Sie den Graphen von  $f$  auf Schnittpunkte mit den Koordinatenachsen, lokale Extrempunkte, Wendepunkte und geben Sie gegebenenfalls deren Koordinaten an! Skizzieren Sie den Graphen von  $f$  im Intervall  $-2 \leq x \leq 6,5$

10 BE

b)

Auf dem Graphen der Funktion  $f$  existiert ein Punkt  $Q(q; f(q))$  mit  $0 < q < 6$ . Die Parallele zur  $y$ -Achse durch  $Q$  schneidet die  $x$ -Achse im Punkt  $P$ .

$O$  bezeichnet den Koordinatenursprung.

Ermitteln Sie die Koordinaten von  $Q$  so, dass der Flächeninhalt des Dreiecks  $OPQ$  maximal ist!

5 BE

c)

Bestimmen Sie eine Gleichung der Wendetangente an den Graphen von  $f$ !

Ermitteln Sie, wie viele Tangenten es an den Graphen von  $f$  gibt, die die Wendetangente senkrecht schneiden?

4 BE

d)

Der Graph von  $f$  und die  $x$ -Achse begrenzen eine Fläche vollständig. Bestimmen Sie, in welchem Verhältnis diese Fläche durch die Gerade mit der Gleichung  $y = 2x$  geteilt wird!

6 BE

e)

Für jede reelle Zahl  $a$  mit  $a \neq 0$  ist eine Funktion  $g_a$  durch

$$y = g_a(x) = a \cdot (x^2 - 6x)$$

mit  $x \geq -2$  gegeben. Skizzieren sie den Graphen von  $g_1$  in das Koordinatensystem aus Teilaufgabe a)!

Unter welchem Winkel schneiden sich die Graphen  $f$  und  $g_1$  in dem vom Ursprung verschiedenen Schnittpunkt? (Kontrolle  $S(6, 0)$ )

Untersuchen Sie, ob man  $a$  so wählen kann, dass sich die Graphen von  $f$  und  $g_a$  an der Stelle 6 berühren?

5 BE

Skizze!

Skizze

$x \geq -2$

### 3 Analytische Geometrie - B1

In einem kartesischen Koordinatensystem sind die Punkte  $P(7; 4; 1)$ ,  $Q(1; 8; 5)$ ,  $R_a(4; a; 9-a)$ ,

GF03

$S(4; 4; 5)$ ,  $T(5; 0; 1)$  sowie der Vektor  $\vec{v} = \begin{pmatrix} -6 \\ 1 \\ 7 \end{pmatrix}$  gegeben (mit  $a \in \mathbb{R}$ ).

a)

Ermitteln Sie eine Gleichung der Ebene  $\eta$ , die die Punkte  $P$ ,  $Q$  und  $R_3$  enthält! Bestimmen Sie die Koordinaten des Punktes, in welchem die  $x$ -Achse die Ebene  $\eta$  durchstößt!

Die Gerade  $g$  verläuft durch den Punkt  $T$  und besitzt den Richtungsvektor  $\vec{v}$ . Weisen Sie nach, dass die Gerade  $g$  parallel zur Ebene  $\eta$  liegt und berechnen Sie den Abstand von  $g$  zur Ebene  $\eta$ !

7 BE

b)

Die Punkte  $P, Q, U$  und  $T$  bilden in dieser Reihenfolge ein Viereck. Wie müssen die Koordinaten des Punktes  $U$  gewählt werden, damit das Viereck ein Parallelogramm ist? Berechnen Sie die Größe des Winkels, den die Parallelogrammseiten  $\overline{PT}$  und  $\overline{PQ}$  einschließen!

Bestimmen Sie den Abstand des Punktes  $T$  von der Geraden  $h$ , die durch die Punkte  $P$  und  $Q$  verläuft!

6 BE

c)

Zeigen Sie, dass der Punkt  $S$  auf der Strecke  $\overline{R_3R_6}$  liegt!  
In welchem Verhältnis teilt  $S$  die Strecke  $\overline{R_3R_6}$ ?

3 BE

d)

Weisen Sie nach, dass das Dreieck  $PR_aQ$  gleichschenkelig ist!  
Für welche Werte von  $a$  ist das Dreieck  $PR_aQ$  bei  $R_a$  rechtwinklig?

4 BE

NF/KF

#### 4 Teil - C

a)

Gegeben sind zwei Folgenglieder  $a_3 = 63$  und  $a_7 = 263$ . Ermitteln Sie das Folgenglied  $a_{42}$ , wenn  $(a_n)$  eine arithmetische Zahlenfolge ist!

XY

2 BE

b)

Die Gerade  $g$  mit der Gleichung  $y = -2x + 4$  begrenzt mit den Koordinatenachsen ein Dreieck. Dieses Dreieck erzeugt bei Rotation um die  $x$ -Achse einen Kegel. Bestimmen Sie das Volumen dieses Kegels!

GF02

2 BE

c)

Gegeben sind die Vektoren  $\vec{a} = \begin{pmatrix} t \\ -t \\ 1 \end{pmatrix}$  und  $\vec{b} = \begin{pmatrix} 2t \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ . Untersuchen Sie, ob es reelle Zahlen  $t$  gibt, so dass die Vektoren  $\vec{a}$  und  $\vec{b}$  zueinander orthogonal sind!

GF05

2 BE

d)

Lösen Sie die Gleichung  $2^{x+1} = 8 \cdot 2^{3x-1}$  ( $x \in \mathbb{R}$ )!

GF04

1 BE

e)

Ein Würfel wird drei Mal geworfen. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass insgesamt mindestens zwei Sechsen gewürfelt werden?

XY

2 BE

f)

Bestimmen Sie alle reellen Zahlen  $c$ , für die gilt  $\int_0^c (x^2 - 2x) dx = 0$ !

XY

1 BE

z)

Zusatzaufgabe (optional):

ZA

Am 25. Januar 2013 wurde mit einem CPU Cluster der mathematischen Fakultät an der University of Central Missouri die derzeit größte bekannte Primzahl berechnet. Sie kann in der Form

$$2^{57885161} - 1$$

angegeben werden. Wie viele Dezimalstellen hat diese Primzahl?

Angenommen 4067 Zeichen passen auf eine A4 Seite, wie viele A4 Seiten würde die bisher größte bekannte Primzahl einnehmen?

2 BE