Mix Prüfung

Steve Göring, stg7@gmx.de

1. April 2013

1 Analysis - A (ala GF05)

Gegeben ist die Funktion $f(x)$ durch

$$f(x) = e^{-2x+1} \cdot (6x^2 + 2x - 4)$$

mit $x \in \mathbb{R}$

a) Untersuchen Sie den Graphen von f auf Schnittpunkte mit den Koordinatenachsen sowie auf lokale Extrempunkt und Wendepunkt. Skizzieren Sie den Graphen in einem geeigneten Intervall und stellen Sie Überlegungen über das Verhalten im Unendlichen des Graphen an – versuchen Sie diese Überlegungen durch Rechnung nachzuweisen.

Geben Sie weiterhin das Monotonieverhalten und den Wertebereich der Funktion f an.

b) Weisen Sie nach, dass

$$F(x) = -e^{1-2x} \cdot x \cdot (3x + 4) + c$$

mit $c \in \mathbb{R}$ eine Stammfunktion von f ist. Geben Sie ohne weitere Rechnung mögliche Extremstellen der Funktion $F(x)$ an und begründen Sie ihre Entscheidung.

Bestimme eine Stammfunktion die den Punkt $P(0.5, 42)$ verläuft.

Berechnen Sie die Fläche die von der Funktion f und der x-Achse vollständig eingeschlossen wird! Wie viel Prozent dieser Fläche liegen im III. Quadranten.

c) An der Stelle $x = \frac{1}{2}$ wird eine Tangente t an den Graphen von f angelegt. Bestimmen Sie die Gleichung der Tangenten und zeichnen Sie sie in das Koordinatensystem von a) ein. Berechnen Sie den Schnittwinkel der Tangente mit der x-Achse und der y-Achse. Geben Sie zusätzlich die Steigung der Tangente in Prozent an!

Eine Gerade $g(x)$ verläuft senkrecht zu dieser Tangente durch den Punkt $Q(0, 3)$. Geben sie die Gleichung der Gerade g an. Weiterhin begrenzen die Gerade g und die Tangente t mit der y-Achse ein Dreieck, bestimmen Sie den Flächeninhalt!

d) Für jede reelle Zahl a ist eine Funktion f_a gegeben durch

$$f_a(x) = e^{-2x+1} \cdot (6x^2 + 2x + c)$$

mit $x \in \mathbb{R}$. Bestimmen Sie die Anzahl der Schnittpunkte des Graphen der Funktion f_a mit der x-Achse in Abhängigkeit vom Parameter a!

2 Analytische Geometrie- B (ala LF01)

In einem kartesischen Koordinatensystem sind für alle r ($r \in \mathbb{R}$,$r \neq 0$) die Punkte $A_r(2r/2r/-4r)$, $B_r(r/r/-2r)$, $C_r(-r/r/6r)$ und $P(3/12/-3)$ gegeben.

a) Untersuchen Sie ob es ein r gibt, so dass die Punkte A_r,B_r und C_r auf einer Geraden liegen.

b) Zeigen Sie, unabhängig von r, dass alle Punkte A_r, B_r und C_r genau eine Ebene E aufspannen. Geben Sie eine parameterfreie Gleichung der Ebene E an.

c) Gegeben ist die Ebene H durch $4x - 2y + z = 0$ Berechnen Sie den Abstand des Punktes P zur Ebene H!

d) Die Punkte A_r,B_r,C_r und P bilden eine Pyramide. Für welchen Wert von r beträgt das Volumen der Pyramide $10VE$?

e) Geben Sie eine Gleichung der Ebene L an, die parallel zur Ebene H verläuft und den Punkt P enthält.

f) Die Gerade g gegeben durch

$$g : \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, t \in \mathbb{R}$$

schneidet die Ebene H. Bestimmen Sie den Durchstoßpunkt.

3 Mischmasch - C (ala LK08 /GK08)

a) Gegeben sei die Folge (a_n) mit $a_n = \frac{1-2n}{3-4n}$ mit $n \in \mathbb{N}$. Geben Sie den Grenzwert g dieser Folge an!

Welches ist das erste Folgenglied, das kleiner als $g + \frac{1}{100}$ ist?

b) Der Graph einer quadratischen Funktion hat bei $x_1 = 0$ eine lokales Maximum, bei $x_2 = 3$ eine Nullstelle und schließt mit der x-Achse eine Fläche von $18FE$ ein. Ermitteln Sie die Gleichung der beschriebenen Funktion!

c) Beweisen Sie folgenden Satz aus der Geometrie:

"Die Verbindungsstrecke der Mittelpunkte zweier Dreiecksseiten ist zur dritten Seite parallel und halb so lang wie diese."

(Hinweis: Nutzen Sie ihre fortgeschrittenen Kenntnisse der analytischen Geometrie um den Sachverhalt zu modellieren.)

d) Vereinfachen Sie den Term $\log_{\sqrt[8]{a}} a^{251}$ mit $a > 0$, $a \neq 1$ weitestgehend!

f) André und Boris spielen ein Tennismatch. Dabei gewinnt derjenige, der zuerst zwei Sätze gewonnen hat. Erfahrungsgemäß gewinnt Boris zwei von drei Sätzen und André einen von drei Sätzen.

Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass André das Tennismatch trotzdem gewinnt! Zeichnen Sie dazu zunächst ein Baumdiagramm!

g) Bilde die Umkehrfunktion f^{-1} von f mit

$$f(x) = \ln(4 - x^2)$$

4 Zusatzaufgaben (ala "Steve")

4.1 .

Gegeben ist die Funktion

$$f(x) = x^2 e^{-x}$$

Bestimme die Schnittpunkte mit den Koordinatenachsen, das Monotonieverhalten, Extrempunkte, Wendepunkte und skizziere den Graphen im Intervall $I = [-1, 10]$.

Weise nach, dass

$$\int e^{-x} x^2 dx = -e^{-x}(x^2 + 2x + 2) + c$$

mit $c \in \mathbb{R}$ gilt.

Der Graph, die x-Achse und die Geraden $x = 1, x = a$ mit $a > 1$ begrenzen eine Fläche. Bestimme für $a = 10$ und $a = 100$ den Flächeninhalt. Welche Vermutung kann für die Fläche bei $a = 1000$ oder sogar $a = \infty$ getroffen werden - Begründe!

4.2 .

Führe für die folgende Funktion eine Kurvendiskussion durch, dabei sind folgende Punkte zu bearbeiten:

- Schnittpunkte mit den Koordinatenachsen
- Definitonsbereich, Wertebreich
- Grenzwertverhalten im Unendlichen
- Asymptoten (senkrechte, waagerechte/schräge)
- Extrempunkte, eventuelle Wendepunkte
- Graphenskizze

$$f(x) = \frac{x^2 + 7x - 30}{x - 4}$$

4.3 .

Berechne die Grenzwerte $\lim\limits_{x \to \infty} f_i(x)$ und $\lim\limits_{x \to -\infty} f_i(x)$ der Funktionen f_i

(a)

$$f_1(x) = \frac{2x^4 + 7x - 3}{x^2 - 4}$$

(b)

$$f_2(x) = \frac{9x^2 - 3}{8x^3 + 12}$$

(c)

$$f_3(x) = \frac{7x^2 + 8x - 17}{14x^2 + 19x - 5}$$

(d)* [1]

$$f_4(x) = \frac{3x^a - 2x - 23}{5x^2 - 11}$$

wobei a eine beliebige ganze Zahl ist. (Beachte Fallunterscheidung)

(e)*

$$f_5(x) = \frac{c_a x^a + c_{a-1}x^{a-1} + ... + c_1 x + c_0}{d_b x^b + d_{b-1}x^{b-1} + ... + d_1 x + d_0}$$

die c_i, d_i bezeichnen die Koeffizienten der jeweiligen Polynome, a ist der Zählergrad und b ist der Nennergrad Welche Schlussfolgerungen kann man für gebrochenrationale Funktionen ziehen?

4.4 .

$f(x)$ ist eine ganzrationale Funktion mit Grad 3. Weiterhin ist $f(x)$ punktsymetrisch zum Koordinatenursprung und besitzt einen Hochpunkt bei $H(3,4)$. Rekonstruiere die Funktionsgleichung anhand der gegebenen Informationen!

4.5 .

Eine diophantische Gleichung ist eine Gleichung bei der nur ganzzahlige Lösungen von Interesse sind.[2]

Eine der bekanntesten Gleichungen ist die Pythagorasgleichung.

$$a^2 + b^2 = c^2$$

Gib ein Zahlentripel (a, b, c), welches nur aus ganzzahligen Werten besteht – somit die diophatische Pythagorasgleichung löst – an. Wie viele solcher ganzzahliger Lösungen gibt es?

Fermat – ein berühmter Mathematiker des 17.Jh – versuchte die Pythagorasgleichung auf höhere Exponenten zu erweitern.

$$a^n + b^n = c^n$$

mit $n > 2$ $a \neq 0, b \neq 0, c \neq 0$. Die Aussage, dass keine ganzen Zahlen diese Gleichung erfüllen, ist als großer Fermatscher Satz bekannt und wurde 1994 in einem 98-seitigen Beweis von Andrew Wiles bewiesen.

Als Randnotiz in einem Mathematikbuch hinterlaß Fermat sinngemäß die Aussage: "Mir ist ein wunderbarer Beweis eingefallen, dass die erweiterte Pythagorasgleichung keine ganzzahligen Lösungen besitzt– nur leider ist kein Platz auf dem Rand."

Gib eine –reele– Lösung an, welches die erweiterte Pythagorasgleichung mit $n = 3$ erfüllt.

4.6 .

Bestimme mögliche ganzzahlige Lösungen der Gleichung

$$a^2 = b^3$$

(inhaltlich: Gibt es Kubikzahlen die auch Quadratzahlen sind?)

4.7 .

Betrachte die ersten 4 Ableitungen der Funktion $f(x) = x \cdot e^x$. Überführe die Beobachtungen über die Ableitungen der Funktion f in eine Funktion $f^n(x)$, welche die n-te Ableitung der Funktion darstellt. Gilt $f^{-1} = F(x)$?

[1] mit * markierte Aufgaben sind schwerer

[2] wieder einmal erkennt man, Mathematik bzw. Wissenschaft ist durchgehend von hochtrabenden Begriffen durchzogen