Fläche-e-Funktion

Steve Göring, stg7@gmx.de

16. April 2013

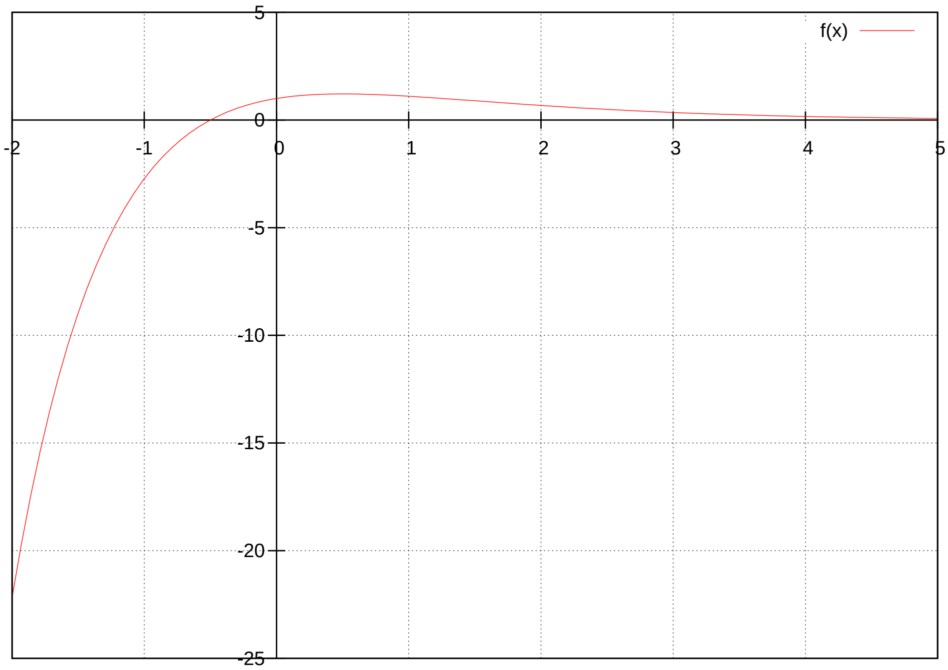
Gegeben ist die Stammfunktion $F(x)$ der Funktion $f(x)$ mit:

$$F(x) = (-2x - 3) \cdot e^{-x} + 2003$$

$$f(x) = (2x + 1) \cdot e^{-x}$$

Es soll der Flächeninhalt der Fläche von $f(x)$ im Intervall $-1 \leq x \leq 1$ bestimmt werden.

Die Funktion $f(x)$ hat bei $x = -0.5$ eine Nullstelle.



Die gesuchte Fläche setzt sich also aus zwei Teilflächen zusammen:

$$A_{ges} = A_1 + A_2$$

wobei A_1 die Fläche von $-1 \leq x \leq -0.5$ und A_2 die Fläche von $-0.5 \leq x \leq 1$ beschreiben.

Berechne nun die Teilfläche A_1 mittels Integral :

$$\int\limits_{-1}^{-0.5} f(x)dx = \left[(-2x - 3) \cdot e^{-x} + 2003\right]_{-1}^{-0.5} = (-2 \cdot (-0.5) - 3) \cdot e^{0.5} - ((-2 \cdot (-1) - 3) \cdot e^{1}) = -2e^{0.5} + e \approx -0.57$$

Das Integral ist negativ, also folgt für den Flächeninhalt:

$$A_1 = |-2e^{0.5} + e| = 2e^{0.5} - e$$

(Hier war die Definition des Betrages zu benutzen (1), oder man verstümmelt das Integral geschickt (2) oder man rechnet mit dem gerundeten Wert!)

Es soll nun die Teilfläche A_2 bestimmt werden:

$$\int\limits_{-0.5}^{1} f(x)dx = \left[(-2x-3)\cdot e^{-x} + 2003\right]_{-0.5}^{1} = (-2\cdot 1-3)e^{-1} - ((-2\cdot(-0.5)-3)\cdot e^{0.5}) = -5e^{-1} + 2e^{0.5} \approx 1.45$$

Für A_2 folgt also direkt:

$$A_2 = -5e^{-1} + 2e^{0.5}$$

Anschließend kann die Gesamtfläche berechnet werden:

$$A_{ges} = 2e^{0.5} - e - 5e^{-1} + 2e^{0.5} = 4e^{0.5} - e - 5e^{-1} \approx 2.02FE$$

(1)

Flächen sind immer positiv, also muss man aufpassen, dass man beim addieren verschiedener Flächen die durch Integrale berechnet werden aufpassen (denn Integrale können auch negativ sein). Aus der Skizze kann man schließen, dass A_1 negativ ist (denn Flächen unterhalb der x-Achse sind immer negativ, überhalb positiv). Demzufolge muss der Betrag verwendet werden:

$$|a| = \begin{cases} x & \text{,falls } x \geq 0 \\ -x & \text{,falls } x < 0 \end{cases}$$

also ergibt sich, da $-2e^{0.5} + e < 0$ ist die Anwendung des zweiten Falls:

$$|-2e^{0.5} + e| = -(-2e^{0.5} + e) = ...$$

(2)

Wenn man bereits im Vorfeld erkennt, dass eine Teilfläche negativ ist, kann man auch geschickt folgende Eigenschaft benutzen:

$$\int\limits_{a}^{b} f(x)dx = -\int\limits_{b}^{a} f(x)dx$$

Also könnte man A_1 mittels:

$$\int\limits_{-0.5}^{-1} f(x)dx$$

berechnen.