

Exponentialfunktion/exponentielles Wachstum

Steve Göring

7. April 2013

1 Wachstum

1.1 Kapital

Meine Bank des Vertrauens verspricht mir bei einer festen Anlage von 3000 Euro über 5 Jahren bei jährlicher Verzinsung mit 3% einen Gesamtgewinn nach dem Zeitraum von insgesamt rund 16%. Lügt sie mich an? (Kontrollergebnis: nein!)

1.2 Physik-Halbwertszeit

In der Atomphysik betrachtet man oft Vorgänge von radioaktiven Materialien, deren radioaktiver Anteil in einer gewissen Zeitspanne halbiert wird. Diese Zeitspanne wird Halbwertszeit genannt. Betrachtet man nun das fiktive Element λ mit einer Halbwertszeit von 4 Tagen. Nach wie vielen Tagen ist der radioaktive Anteil einer Probe von 2 kg dieser Substanz auf 1% der ursprünglichen Masse zerfallen?

(Kontrollergebnis: 6^4)

1.3 Bio- fiktiv

Ein Bienenschwarm verdreifacht seine Größe jede Woche. Meister Imker hat nach 3 Wochen alle Bienen gezählt und ist zu dem Ergebnis gekommen dass er 9 Tausend Bienen hat. Wie viele Bienen hatte er am Anfang der Saison? (Kontrollergebnis: 1000)
Nach wie vielen Wochen hat er 100 mal so viele Bienen wie am Anfang der Saison? (Kontrollergebnis: ≈ 4)

2 Exponentialfunktion

2.1 Ableitungen

Bilde die erste Ableitung der folgenden Funktionen:

- $f(x) = 1 + e^{-2x+1}$
($f'(x) = -2e^{-2x+1}$)
- $f(x) = x + e^{x^2}$
($f'(x) = 1 + 2xe^{x^2}$)
- $f(x) = (2x^2 + x) \cdot e^{1-x}$
($f'(x) = (-2x^2 + 3x + 1) \cdot e^{1-x} = -2x^2e^{1-x} + 3xe^{1-x} + e^{1-x}$)
- $f(x) = a \cdot e^{ax}$
($f'(x) = a^2e^{ax}$)
- $f(x) = (ax + b) \cdot e^{-x}$
($f'(x) = -(a(x - 1) + b) \cdot e^{-x} = -axe^{-x} + ae^{-x} - be^{-x}$)
- $f(x) = e^x + \frac{1}{e^x}$
($f'(x) = e^x - e^{-x}$)

2.2 Integrale

Berechne folgende Integrale

- $\int e^{-x} dx (= -e^{-x} + c)$
- $\int e^x + e^{-x} dx (= e^x - e^{-x} + c)$
- $\int xe^x dx (= (x - 1)e^x + c)$ (eventuell könnt ihr das nicht)

2.3 Nullstellen

Berechne – sofern es möglich ist – die Nullstellen der Funktionen und deren Ableitungen aus dem Aufgabenteil 2.1

2.4 komplexere Aufgabe

Gegeben ist die Funktion

$$f(x) = x^2e^{-x}$$

Bestimme die Schnittpunkte mit den Koordinatenachsen, das Monotonieverhalten, Extrempunkte, Wendepunkte und skizziere den Graphen im Intervall $I = [-1, 10]$.

Weise nach, dass

$$\int e^{-x}x^2dx = -e^{-x}(x^2 + 2x + 2) + c$$

gilt.

Der Graph, die x-Achse und die Geraden $x = 1, x = a$ mit $a > 1$ begrenzen eine Fläche. Bestimme für $a = 10$ und $a = 100$ den Flächeninhalt. Welche Vermutung kann für die Fläche bei $a = 1000$ oder sogar $a = \infty$ getroffen werden - Begründe!