Dreiecksfläche

Steve Göring, stg7@gmx.de
14. Oktober 2013

„*Einfache Logik ist die beste.*“
– Star Trek IV- Kirk

Gegeben ist ein Dreieck ABC, es sei $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$ und $\overrightarrow{AC} = \vec{b}$. Zwischen den Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ sei der Winkel α. So kann die Fläche mittels

$$A_\Delta = \frac{1}{2}|\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \sin\alpha$$

(1) berechnet werden.

Ist der Winkel unbekannt so kann mittels des Skalarprodukts der Winkel zwischen den Vektoren $\vec{a}, \vec{b}$ mit

$$\cos\alpha = \frac{\vec{a} \circ \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|}$$

(2) berechnet werden

Benutzt man nun die Erinnerungen an einen Zusammenhang zwischen $\sin$ und $\cos$

$$1 = (\sin\alpha)^2 + (\cos\alpha)^2$$

Und formt nach $\sin\alpha$ um, so erhält man (3)

$$\sin\alpha = \sqrt{1 - (\cos\alpha)^2}$$

Kombiniert man (2) und (3) so ergibt sich (4)

$$\sin\alpha = \sqrt{1 - \left(\frac{\vec{a} \circ \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|}\right)^2}$$

Kombiniert man nun weiter (4) mit (1) so erhält man

$$A_\Delta = \frac{1}{2}|\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \sqrt{1 - \left(\frac{\vec{a} \circ \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|}\right)^2}$$

Diese Formel ist nun unheimlich hässlich, also benutzt man Umformungen um sie schöner zu gestallten

$$A_\Delta = \frac{1}{2}|\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \sqrt{1 - \left(\frac{\vec{a} \circ \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|}\right)^2}$$

$$A_\Delta = \frac{1}{2}\sqrt{(|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|)^2 \cdot \left(1 - \left(\frac{\vec{a} \circ \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|}\right)^2\right)}$$

$$A_\Delta = \frac{1}{2}\sqrt{(|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|)^2 - (|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|)^2 \cdot \left(\frac{\vec{a} \circ \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|}\right)^2}$$

$$A_\Delta = \frac{1}{2}\sqrt{|\vec{a}|^2 \cdot |\vec{b}|^2 - (|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|)^2 \cdot \frac{(\vec{a} \circ \vec{b})^2}{(|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|)^2}}$$

Nach dem Kürzen ergibt sich:

$$A_\Delta = \frac{1}{2}\sqrt{|\vec{a}|^2 \cdot |\vec{b}|^2 - (\vec{a} \circ \vec{b})^2}$$

wzzw.